Université Claude Bernard
L2 MASS 31

Mathématiques
2014-2015

Feuille d'exercices numéro 1
Notions de bases : Normes et Boules.

Exercice 1 Normes classiques de $\mathbb{R}^n$ Pour tout $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$||X||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$||X||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

$$||X||_\infty = \max_{i=1...n} |x_i|$$

1. Montrer que $||.||_1, ||.||_2, ||.||_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$ et décrire, pour chacune d'elles, les boules de centre 0 et de rayon 1 dans le cas $n = 2$.
2. Montrer que les trois normes $||.||_1, ||.||_2, ||.||_\infty$ sont équivalentes.

Exercice 2 Soit $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$N(u) = |x| + |y - x| \text{ pour } u = (x, y).$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Dessiner la boule fermée B de centre 0 et de rayon 1 pour N.
3. Montrer que les normes N et $||.||_1$ sont équivalentes.

Exercice 3 Normes sur les matrices

Pour tout élément $A = (a_{ij})$ de $M_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$||A||_\infty = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|,$$

$$|||A|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

1. Montrer que l'on définit ainsi des normes sur $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $||AB||_\infty \leq n||A||_\infty \; ||B||_\infty$ et $|||AB|||_\infty \leq |||A|||_\infty \; |||B|||_\infty$.
2. Montrer que si on identifie $M_{n,1}(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^n$:

$$||A||_\infty = \sup\{||AB||_\infty \mid B \in M_{n,1}(\mathbb{R}) : ||B||_1 \leq 1\},$$

$$|||A|||_\infty = \sup\{||AB||_\infty \mid B \in M_{n,1}(\mathbb{R}) : ||B||_\infty \leq 1\}.$$

Exercice 4 Pour tout élément $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes, on pose :

$$n_1(P) = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

$$n_2(P) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2}$$

$$n_\infty(P) = \max_{i=1\ldots n} |a_i|$$

1. Comme dans l'exercice 1, on montre que n_1, n_2, n_∞ sont des normes. Ces normes sont-elles équivalentes ?
2. Soit $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} X^k$. La suite (P_n) converge-t-elle pour une de ces normes ? est-elle de Cauchy ?

Exercice 5 Soit $(E, ||.||)$ un evn. Montrer que tout $(x, y) \in E^2$ vérifie :

$$||x|| + ||y|| \leq ||x + y|| + ||x - y||.$$

Exercice 6 Identité du parallélogramme

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé dans lequel tout $(x, y) \in E^2$ vérifie :

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 \leq 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

1. Montrer que alors pour tout $(x, y) \in E^2$:
$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$
2. On pose alors
$$\langle x \mid y \rangle = \frac{1}{2} \left(||x + y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2 \right).$$
Montrer que $||x||^2 = \langle x \mid x \rangle$.
Montrer que pour tout y, $x \mapsto \langle y \mid x \rangle$ et $x \mapsto \langle x \mid y \rangle$ sont $\mathbb{R}$-linéaires (on pourra vérifier la linéarité sur $\mathbb{Q}$ et que $\lambda \mapsto \langle y \mid \lambda x \rangle$ est continue).
3. Connaissez vous des normes satisfaisants cette relation ?

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel et soient N_1 et N_2 deux normes sur E. On note $B_i(a, r)$ (resp. $B_{Fi}(a, r)$) la boule ouverte (resp. fermée) pour la norme N_i.

1. Montrer que : $B_{F1}(0, 1) = B_{F2}(0, 1) \iff (\forall x \in E,\ N_1(x) = N_2(x))$
2. Montrer que : $B_1(0, 1) = B_2(0, 1) \iff (\forall x \in E,\ N_1(x) = N_2(x))$

Exercice 8

1. Donner un exemple de partie A de $\mathbb{R}$ tel que les 7 ensembles :
$$A, \overline{A}, \mathrm{Int}(A), \mathrm{Int}(\overline{A}), \overline{\mathrm{Int}(A)}, \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(A)}), \overline{\mathrm{Int}(\overline{A})}$$
soient tous distincts
2. Que dire du rapport de $\mathrm{Int}(\overline{A})$, et $\mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(\overline{A})})$? De même, que dire du rapport de $\overline{\mathrm{Int}(A)}$ et $\overline{\mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(A)})}$?