Université Claude Bernard | Mathématiques
L2 MASS 31 | 2012-2013

Feuille d'exercices numéro 1

Notions de bases : Normes et Boules.

Exercice 1 Normes classiques de $\mathbb{R}^n$ cf TD.

Exercice 2 cf TD.

Exercice 3 Normes sur les matrices

Pour tout élément $A = (a_{ij})$ de $M_n(\mathbb{R})$, on pose :

$$||A||_\infty = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|,$$

$$|||A|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

1. Montrer que l'on définit ainsi des normes sur $M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $||AB||_\infty \leq n||A||_\infty \; ||B||_\infty$ et $|||AB|||_\infty \leq |||A|||_\infty \; |||B|||_\infty$.
   Correction : $||A||_\infty$ est la norme $||.||_\infty$ en voyant $M_n(\mathbb{R}) \simeq R^{n^2}$.
   Montrons que $|||.|||_\infty$ est une norme.
   - positivité évidente et $|||A|||_\infty = 0 \Rightarrow \forall i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = 0 \Rightarrow \forall i,j |a_{ij}| = 0$ (on utilise une somme est nulle ssi tous ses termes sont nuls)
   -$|||\lambda A|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |\lambda a_{ij}| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |\lambda||a_{ij}| = |\lambda| \; |||A|||_\infty$
   -

   $$|||A+B|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}+b_{ij}| \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|+|b_{ij}| = \max_{1\leq i\leq n} \left[\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{ij}|\right] \leq |||A|||_\infty + |||B|||_\infty$$

   Montrons les inégalités : -

   $$||AB||_\infty = \max_{1\leq i,j\leq n} |\sum_k a_{ik}b_{kj}| \leq \max_{1\leq i,j\leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}| \leq \max_{1\leq i,j,k\leq n} n|a_{ik}||b_{kj}| = n||A||_\infty \; ||B||_\infty$$

   -

   $$|||AB|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |\sum_k a_{ik}b_{kj}| \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j,k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j,k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{k=1}^{n} \left(|a_{ik}| \sum_{j=1}^{n} |b_{kj}|\right)$$
   $$\leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{k=1}^{n} \left(|a_{ik}| \max_k \sum_{j=1}^{n} |b_{kj}|\right) \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{k=1}^{n} (|a_{ik}| \; |||B|||_\infty) = |||A|||_\infty \; |||B|||_\infty$$

2. Montrer que si on identifie $M_{n,1}(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}^n$:

   $$||A||_\infty = \sup\{||AB||_\infty \mid B \in M_{n,1}(\mathbb{R}) : ||B||_1 \leq 1\},$$

   $$|||A|||_\infty = \sup\{||AB||_\infty \mid B \in M_{n,1}(\mathbb{R}) : ||B||_\infty \leq 1\}.$$

Correction :
Montrons $||AB||_\infty \leq ||A||_\infty ||B||_1, |||AB|||_\infty \leq |||A|||_\infty ||B||_\infty$ (cela montre l'inégalité $\geq$ ci dessus).

$$||AB||_\infty = \max_i |\sum_{k=1}^n a_{ik} b_k| \leq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|\ |b_k| \leq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| ||b||_\infty = |||A|||_\infty ||B||_\infty.$$

$$||AB||_\infty = \max_i |\sum_{k=1}^n a_{ik} b_k| \leq \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}|\ |b_k| \leq ||A||_\infty \sum_{k=1}^n |b_k| = ||A||_\infty ||B||_1.$$

Il reste à montrer :

$$||A||_\infty \leq \sup\{||AB||_\infty \mid B \in M_{n,1}(\mathbb{R}) : ||B||_1 \leq 1\},$$

$$|||A|||_\infty \leq \sup\{||AB||_\infty \mid B \in M_{n,1}(\mathbb{R}) : ||B||_\infty \leq 1\}.$$

Or soit $B = e_j$ (vecteur avec 1 dans la j-ème coordonnée, 0 sinon $||B||_1 = 1.$ et $||AB||_\infty = max_i |a_{ij}|$ d'où

$$||A||_\infty = \max_i ||Ae_i||_\infty \leq \sup\{||AB||_\infty \mid B \in M_{n,1}(\mathbb{R}) : ||B||_1 \leq 1\}.$$

De même soit $B_i = (signe(a_{i1}), ..., signe(a_{in}))$ avec $signe(x) = 1$ si $x \geq 0$ et -1 sinon. Alors $||B_i||_\infty \leq 1$ et

$$||AB_i||_\infty = \max_j |(AB_i)_j| \geq |(AB_i)_i| = |\sum_{k=1}^n a_{ik}(B_i)_k| = \sum_{k=1}^n |a_{ik}|.$$

En conséquence

$$|||A|||_\infty = \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \leq \max_i ||AB_i||_\infty \leq \sup\{||AB||_\infty \mid B \in M_{n,1}(\mathbb{R}) : ||B||_\infty \leq 1\}.$$

Exercice 4 Pour tout élément $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynmes, on pose :

$$n_1(P) = \sum_{i=1}^n |a_i|$$

$$n_2(P) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2}$$

$$n_\infty(P) = \max_{i=1...n} |a_i|$$

1. cf TD.
2. Soit $P_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} X^k$. La suite (P_n) converge-t-elle pour une de ces normes ? est-elle de Cauchy ?

   Correction : Montrons que (P_n) ne converge pas pour la norme n_∞ (vu que $n_\infty \leq n_2 \leq n_1$ cela suffit à montrer qu'elle ne converge pas pour aucune de ces normes)

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ on montre que P_n ne tend pas vers Q. $Q = \sum_{i=0}^m a_i X^i$
Soit $n \geq m+1$, alors

$$P_n - Q = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} X^k - \sum_{k=0}^m a_k X^k = -a_0 + \sum_{k=1}^m (\frac{1}{k^2} - a_k) X^k + \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k^2} X^k$$

d'où $n_\infty(P_n - Q) = \max(|a_0|, \max_{k=1...m} |\frac{1}{k^2} - a_k|, \max_{k=m+1,..,n} \frac{1}{k^2}) \geq \frac{1}{(m+1)^2}$ et ceci pour tout $n \geq m+1$ donc $n_\infty(P_n - Q) \nrightarrow 0$ i.e. $P_n \nrightarrow Q$.
Montrons que (P_n) est de Cauchy pour n_1 donc pour toutes les autres normes $n_\infty \leq n_2 \leq n_1$. Vu que $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} < \infty (MASS32)$ on a $v_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ de Cauchy dans $\mathbb{R}$
Soit $\epsilon > 0$ on a donc N tel que pour tout $p, q \geq N$ $|v_q - v_p| \leq \epsilon$. Or si $q \geq p \geq N$

$$n_1(P_p - P_q) = \sum_{k=p+1}^q \frac{1}{k^2} = v_q - v_p \leq \epsilon.$$

Ceci dit juste (P_p) de Cauchy

Exercice 5 cf TD.

Exercice 6 Identité du paralllogramme

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel norm dans lequel tout $(x, y) \in E^2$ vrifie :

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 \leq 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

1. Montrer que alors pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2).$$

Correction : On applique l'inégalité à x', y' tel que $x' = x+y$,$y' = x-y$ cela donne :

$$4(||x||^2 + ||y||^2) = ||x'+y'||^2 + ||x'-y'||^2 \leq 2(||x'||^2 + ||y'||^2) = 2(||x+y||^2 + ||x-y||^2).$$

et on divise par 2 pour obtenir l'inégalité voulue.

2. On pose alors

$$\langle x \mid y \rangle = \frac{1}{2} \left(||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2 \right).$$

Montrer que $||x||^2 = \langle x \mid x \rangle$.
Montrer que pour tout y, $x \mapsto \langle y \mid x \rangle$ et $x \mapsto \langle x \mid y \rangle$ sont $\mathbb{R}$-linéaires (on pourra vrifier la linéarité sur $\mathbb{Q}$ et que $\lambda \mapsto \langle y \mid \lambda x \rangle$ est continue).
Correction : Par symétrie on ne traite que le cas $x \mapsto \langle y \mid x \rangle$.
– Montrons l'additivité $\langle x \mid y+z \rangle = \langle x \mid y \rangle + \langle x \mid z \rangle$. On doit donc montrer

$$||x+y+z||^2 - ||x||^2 - ||y+z||^2 = ||x+y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2 + ||x+z||^2 - ||x||^2 - ||z||^2.$$

Ceci équivaut à :

$$||x+y+z||^2 = ||y+z||^2 + ||x+y||^2 + ||x+z||^2 - ||x||^2 - ||y||^2 - ||z||^2.$$

Or en appliquant l'égalité du 1 à $(x+z, y)$ et $(x+y, z)$ on obtient

$$||x+y+z||^2 + ||x+z-y||^2 = 2(||x+z||^2 + ||y||^2).$$
$$||x+y+z||^2 + ||x+y-z||^2 = 2(||x+y||^2 + ||z||^2).$$

En ajoutant, on obtient :

$$(A) \quad 2||x+y+z||^2 + ||x+z-y||^2 + ||x+y-z||^2 = 2(||x+z||^2 + ||y||^2) + 2(||x+y||^2 + ||z||^2).$$

On applique l'égalité du 1 à $(x, y-z)$ et on obtient

$$(B) \quad ||x+z-y||^2 + ||x+y-z||^2 = 2(||x||^2 + ||y-z||^2).$$

En calculant (D)=((A)-(B))/2, on a donc

$$(D) \quad ||x+y+z||^2 = ||x+z||^2 + ||y||^2 + ||x+y||^2 + ||z||^2 - ||x||^2 - ||y-z||^2.$$

Il reste à appliquer l'inégalité du 1 à (y, z)

$$(E) \quad ||z+y||^2 + ||z-y||^2 = 2(||z||^2 + ||y||^2).$$

Finalement (D)-(E) s'écrit :

$$||x+y+z||^2 - ||z+y||^2 - ||z-y||^2 = ||x+z||^2 - ||y||^2 + ||x+y||^2 - ||z||^2 - ||x||^2 - ||y-z||^2.$$

et équivaut au résultat voulu :

$$||x+y+z||^2 = ||z+y||^2 + ||x+z||^2 - ||y||^2 + ||x+y||^2 - ||z||^2 - ||x||^2.$$

– Montrons $\langle x \mid \lambda y\rangle = \lambda\langle x \mid y\rangle$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si $\lambda \in \mathbb{N}$ une récurrence et l'additivité vu auparavant conclut. Si $\lambda \in \mathbb{Q}$ $\lambda = p/q$ on applique le résultat des entiers à $y' = y/q$:
$q\langle x \mid 1/qy\rangle = q\langle x \mid y'\rangle = \langle x \mid qy'\rangle = \langle x \mid y\rangle$ d'où $\langle x \mid 1/qy\rangle = 1/q\langle x \mid y\rangle$ et finalement on conclut au cas $\lambda = p/q$ en réappliquant le cas entier.
On conclut pour $\lambda \in \mathbb{R}$ par densité de $\mathbb{Q}$. Montrons que $\lambda \mapsto \langle x \mid \lambda y\rangle$ est continue, en effet :

$$\langle x \mid \lambda y\rangle = \frac{1}{2}\left(||x+\lambda y||^2 - ||x||^2 - \lambda^2||y||^2\right).$$

Donc par les opérations usuelles il suffit de voir $\lambda \mapsto ||x+\lambda y||$ continue (elle est en fait $||y||$-lipschitzienne) car par inégalité triangulaire inverse :

$$|\ ||x+\lambda y|| - ||x+\lambda_0 y||\ | \leq ||(\lambda-\lambda_0)y|| \leq |\lambda-\lambda_0|\ ||y||.$$

Finalement soit $\lambda_n \in \mathbb{Q}$ convergeant vers $\lambda \in \mathbb{R}$. Par continuité, on passe à la limite dans la relation $\langle x \mid \lambda_n y\rangle = \lambda_n\langle x \mid y\rangle$ pour obtenir le résultat voulu.

3. Connaissez vous des normes satisfaisants cette relation ?
   Correction : la norme $||.||_2$ dans $\mathbb{R}^2$ (cf. géométrie 1ere année) et toutes les autres notées avec indice 2 dans les exemples du cours et du TD.

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel et soient $||.||_1$ et $||.||_2$ deux normes sur E. On note $B_i(a,r)$ (resp. $B_{Fi}(a,r)$) la boule ouverte (resp. ferme) pour la norme $||.||_i$.

1. Montrer que : $B_{F1}(0,1) = B_{F2}(0,1) \iff (\forall x \in E,\ ||x||_1 = ||x||_2)$
2. Montrer que : $B_1(0,1) = B_2(0,1) \iff (\forall x \in E,\ ||x||_1 = ||x||_2)$

Correction :

Les implications $\Leftarrow$ sont évidentes (mêmes normes, mêmes boules).

1) Supposons $B_{F1}(0,1) = B_{F2}(0,1)$ soit $x \in E$ alors $x/||x||_1 \in B_{F1}(0,1) = B_{F2}(0,1)$ donc $||x/||x||_1||_2 = ||x||_2/||x||_1 \leq 1$ d'où une inégalité. Par symétrie on obtient l'autre inégalité.

2) Supposons $B_1(0,1) = B_2(0,1)$ soit $x \in E$ alors, soit $\epsilon > 0$, $x/(||x||_1 + \epsilon) \in B_1(0,1) = B_2(0,1)$ donc $||x/(||x||_1 + \epsilon)||_2 = ||x||_2/(||x||_1 + \epsilon) < 1$ d'où une inégalité $||x||_2 < ||x||_1 + \epsilon$. En passant à la limite $\epsilon \to 0$ on obtient $||x|| \leq ||y||$. Par symétrie on obtient l'autre inégalité.

Exercice 8

1. Donner un exemple de partie A de $\mathbb{R}$ tel que les 7 ensembles :

$$A, \overline{A}, \mathrm{Int}(A), \mathrm{Int}(\overline{A}), \overline{\mathrm{Int}(A)}, \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(A)}), \overline{\mathrm{Int}(\overline{A})}$$

   soient tous distincts.

   Correction : On prend $A =]-1,0[\cup]0,1[\cup(\mathbb{Q}\cap]3,4[) \cup \{2\}$

   Montrons $\overline{A} = [-1,1] \cup [3,4] \cup \{2\} = A \cup \{-1,0,1\} \cup [3,4]$. C'est clairement un fermé (union finie de boules fermées) qui contient A (d'où $\subset$). De plus, A contient $-1 + 1/n\ to -1 \in \overline{A}$, $1/n \to 0 \in \overline{A}$ et $1-1/n \to 1 \in \overline{A}$, $3+1/n \to 3 \in \overline{A}$,$4-1/n \to 4 \in \overline{A}$. De même soit $\lambda \in]3,4[$, on a $\lambda_n \in \mathbb{Q}$ tendant vers λ (par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$) d'où comme $]3,4[$ ouvert, $\lambda_n \in]3,4[\cap\mathbb{Q} \subset A$ pour n assez grand.

   Montrons $Int(A) =]-1,0[\cup]0,1[$. c'est un ouvert (union de boules ouvertes) contenue dans A donc il suffit de voir $Int(A) \subset]-1,0[\cup]0,1[\iff \overline{A^c} \supset]-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[1,\infty[= A^c \cup\{2\}\cup(\mathbb{Q}\cap]3,4[)$ Or A^c contient $2+1/n \to 2 \in \overline{A^c}$ et si $p \in]3q,4q[$ $p,q \in \mathbb{N}$ $p/q + \sqrt{2}/n \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\cap]3,\infty[\subset A^c$ et donc $p/q + \sqrt{2}/n \to p/q \in \overline{A^c}$.

   On a de même, $\overline{Int(A)} = [-1,1]$, $Int(\overline{A}) =]-1,1[\cup]3,4[$, $Int(\overline{Int(A)}) =]-1,1[$, $\overline{Int(\overline{A})} = [-1,1] \cup [3,4]$.

   Tous les ensembles voulus sont différents. (pour expliquer, on a utiliser les $\mathbb{Q}$ pour que tous les ensembles commençant par un intérieur ne contienne par $]3,4[$ et ceux commençant par un adhérence le contienne. On a utiliser $\{2\}$ (resp $\{0\}$) dans A (resp. A^c) pour différencier $\overline{A}$ et quelqu'un passé par un intérieur $\overline{Int(\overline{A})}$ (resp $Int(A)$ et quelqu'un passé par une adhérence $Int(\overline{Int(A)}) =]-1,1[$)

2. Que dire du rapport de $\mathrm{Int}(\overline{A})$, et $\mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(\overline{A})})$? De même, que dire du rapport de $\overline{\mathrm{Int}(A)}$ et $\overline{\mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(A)})}$?

   Correction : Montrons que $\mathrm{Int}(\overline{A}) = \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(\overline{A})})$. (l'autre égalité $\overline{\mathrm{Int}(A)} = \overline{\mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(A)})}$ se montre en prenant $A = B^c$ et en appliquant la première à B)

   Par les résultats généraux $\mathrm{Int}(\overline{A}) \subset \overline{\mathrm{Int}(\overline{A})}$ donc c'est un ouvert contenu dans $\overline{\mathrm{Int}(\overline{A})}$ donc $\mathrm{Int}(\overline{A}) \subset \mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(\overline{A})})$.

   Il s'agit de vérifier l'inclusion réciproque. Or $\mathrm{Int}(\overline{A}) \subset \overline{A}$ donc en prenant l'adhérence $(\overline{\mathrm{Int}(\overline{A})} \subset \overline{\overline{A}} = \overline{A}$. Enfin en prenant l'intérieur : $\mathrm{Int}(\overline{\mathrm{Int}(\overline{A})}) \subset \mathrm{Int}(\overline{A})$.