Université Claude Bernard — Mathématiques
L2 MASS 31 — 2014-2015

Feuille d'exercices numéro 2

Suites, ouverts, fermés.

Exercice 1

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $||.||_2$. Montrer que :

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, y > 0\}$ est un ensemble ouvert.
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, y \geq 0\}$ est un ensemble fermé.

Exercice 2

Soit $X := \{(-1)^n + \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}^*\}$. L'ensemble X est-il un ouvert de $\mathbb{R}$? Déterminer $\overline{X}$.

Exercice 3

On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) muni de la norme $||.||_2$. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont ouverts, lesquels sont fermés ? Calculer les intérieurs, adhérences, frontières.

1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, y \geq 0\}$.
2. $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y > 0\}$.
3. $C = [0,1]\times]1,2[$,
4. $D = \mathbb{Q}^2 \cap ([0,1]\times]1,2[)$,
5. $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy < 1\}$,
6. $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 1, x \neq 0\}$,
7. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 1/n, y = 1/m, n > 0, m > 0\}$,
8. $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z \geq 0\}$,
9. $I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x > 0, y \geq 0, z \in]1,2[\times\{-1/n, \ n \in \mathbb{N}\}\}$,
10. $J = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Q} \ : \ x > 0, y \geq 0\}$,

Exercice 4

Montrer que dans un espace vectoriel normé, l'adhérence d'un convexe est un convexe.

Exercice 5

Soient $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, A et B deux parties non vides de E. Montrer que si B est un ouvert alors $A + B$ est un ouvert.

Exercice 6

Soient $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, A et B deux parties non vides de E. Montrer que A et B peuvent être fermés sans que $A + B$ le soit.

Exercice 7

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé. Etant donnée une famille non vide $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E, comparer les ensembles $\bigcup_{i\in I} A_i$, $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$, $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$, d'une part et $\bigcap_{i\in I} A_i$, $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i}$, $\bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$, d'autre part. Examiner le cas où I est fini.

Exercice 8

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé. Etant donnée une famille non vide $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E, comparer les ensembles $\bigcup_{i\in I} A_i$, $Int(\bigcup_{i\in I} A_i)$, $\bigcup_{i\in I} Int(A_i)$, d'une part et $\bigcap_{i\in I} A_i$, $Int(\bigcap_{i\in I} A_i)$, $\bigcap_{i\in I} Int(A_i)$, d'autre part. Examiner le cas où I est fini.

Exercice 9

Soient $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, A et B deux parties non vides de E. On suppose que A est ouvert. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ et que cette inclusion peut ne pas être vrai si A n'est pas ouvert.

Exercice 10

Soient $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, A et B deux parties denses dans E. On suppose que A est ouvert. Montrer que $A \cap B$ est dense dans E.

Exercice 11

Soit E l'ensemble des suites $P = (a_k)$ de $\mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |a_i| < \infty$ et on note :

$$n_1(P) = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

1. Montrer que n_1 est une norme sur E.
2. Soit $P_k^{(n)} = (\frac{1}{k^2} 1_{\{k\leq n\}})$ et $P^{(n)} = (P_k^{(n)}) \in E$. (Si on identifie $\mathbb{R}[X]$ comme les suites finies dans E. $P^{(n)}$ correspond à la suite de polynômes (P_n) de l'exercie 4 du TD 1)
   $(P^{(n)})$ converge t-elle dans E ? (On admettra que $P = (\frac{1}{k^2}) \in E$. cf. MASS 32)

Exercice 12

Montrer que dans un espace vectoriel normé, un sous espace vectoriel propre n'est jamais ouvert.

Exercice 13

Soient $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, et r un nombre réel, $r > 0$ et $a \in E$. On suppose que A est ouvert. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$ est la boule fermée $B_F(a, r)$ et l'intérieur de la boule fermée $B_F(a, r)$ est la boule ouverte $B(a, r)$.

Exercice 14

Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que $\sup(A) \in \overline{A}$.

Exercice 15

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé et d la distance associée. Soit A une partie non-vide et $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.