Université Claude Bernard
L2 MASS 31

Mathématiques
2013-2014

Feuille d'exercices numéro 2
Suites, ouverts, fermés.

Exercice 1
cf TD.

Exercice 2
cf TD.

Exercice 3
On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) muni de la norme $||.||_2$. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont ouverts, lesquels sont fermés ? Calculer les intérieurs, adhérences, frontières.

1. A cf. TD
2. B Autre méthode qu'en TD. La fonction $f(x, y) = x + y$ est continue car linéaire. Donc $B = f^{-1}(]0, +\infty[)$ est un ouvert comme imageréciproque d'un ouvert par une application continue., De même $f^{-1}([0, +\infty[)$ est fermé contenant B d'où $\overline{B} \subset f^{-1}([0, +\infty[)$. Or $f^{-1}([0, +\infty[) = B \cup \{(x, y) \; |x + y = 0\}$ Soit x, y tel que $x + y = 0$ alors $u_n = (x + 1/n, y) \in B$ et $u_n \to (x, y)$ d'où l'inclusion réciproque $\overline{B} \supset f^{-1}([0, +\infty[)$.
3. $C = [0, 1]\times]1, 2[$ ni ouvert ni fermé $u_n = (-1/n, \lambda) \in C^c$ pour $\lambda \in]1, 2[$ et $u_n \to (0, \lambda) \in C$ donc C^c pas fermé (et $(0, \lambda) \in \overline{C^c}$). $v_n = (\mu, 1 + 1/n) \in C$ pour $\mu \in [0, 1]$ et $v_n \to (\mu, 1) \in C^c$ donc C non fermé (et $(\mu, 1) \in \overline{C}$. Mq $\overline{C} = [0, 1] \times [1, 2]$ c'est bien un fermé (boule fermée de centre $(1/2, 3/2)$ et de rayon $1/2$ pour la norme $||.||_\infty$) d'où $\subset$. On a vu réciproquement $[0, 1]\times\{1\} \subset \overline{C}$ de même $(\mu, 2 - 1/n) \in C$ et tend vers $(\mu, 2)$ d'où $[0, 1] \times \{2\} \subset \overline{C}$. Comme $[0, 1] \times [1, 2] = [0, 1] \times \{2\} \cup [0, 1] \times \{1\} \cup C$ cela conclut. De même, on montre $Int(C) =]0, 1[\times]1, 2[$ qui est ouvert comme boule ouverte et en montrant $\{0\}\times]1, 2[\cup\{1\}\times]1, 2[$ est dans $Int(C)^c = \overline{C^c}$.
4. $D = \mathbb{Q}^2 \cap ([0, 1]\times]1, 2[)$ n'est ni ouvert ni fermé. $\overline{D} = [0, 1] \times [1, 2]$ $Int(D) = \emptyset$ D^c est dense dans $\mathbb{R}^2$ car il contient $(\sqrt{2} + \mathbb{Q})^2$ qui est dense.
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; xy < 1\} = f^{-1}(]-\infty, 1[)$ est ouvert car $f : (x, y) \to xy$ est continue comme polynôme et car $] - \infty, 1[$ est ouvert. De même, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; xy \leq 1\} = f^{-1}(] - \infty, 1])$ est fermé de plus $w_n = (x, (1 - 1/n)1/x) \in E$ et $w_n \to (x, 1/x)$ $(x \neq 0)$ donc $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; xy \leq 1\} = E \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; xy = 1\} \subset \overline{E}$ d'où égalité. $Fr(E)$ est donc l'hyperbole d'équation $xy = 1$.
6. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 \leq 1, x \neq 0\}$ (la boule unité pour la norme 2 privée de l'axe des ordonné) n'est pas fermé car soit $x \in [-1, 1]$ $u_n = (1/n, x(1 - 1/n)) \in F$ (car $(1/n)^2 + (x - x/n)^2 \leq (1 - 1/n)^2 + (1/n)^2 = 1 + 2/n^2 - 2/n \leq 1$ vu $n^2 \geq n$ pour n entier) et $u_n \to (0, x) \notin F$. On n'a donc de plus $\{0\} \times [-1, 1] \subset \overline{F}$. Or $F \cup \{0\} \times [-1, 1] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 \leq 1\} = B_{F,2}(0, 1)$ est un fermé contenant F donc contenant $\overline{F}$. C'est donc $\overline{F} = B_{F,2}(0, 1)$ vu l'autre inclusion juste montrée.

   Par ailleurs F n'est pas ouvert car pour tout x, y tel que $x \neq 0$ et $x^2 + y^2 = 1$, $u_n = (x(1 + /n), y(1 + /n)) \notin F$ (car $(x(1 + /n))^2 + (y(1 + /n))^2 = (1 + /n)^2 > 1$) mais $u_n \to (x, y) \in F$. Ainsi $(x, y) \in \overline{F^c} \cap F$ donc F^c n'est pas fermé et F n'est pas ouvert. De plus $F - \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x \neq 0\} = B_2(0, 1) \cap \{(x, y), x \neq 0\}$ est l'intersection de deux ouverts donc est ouvert et est contenu dans F donc est contenu dans l'intérieur de F. Or On vient de voir que

$\{(x,y) : x^2+y^2 = 1, x \neq 0\}$ n'est pas dans l'intérieur de F d'où $Int(F) = F - \{(x,y) : x^2+y^2 = 1, x \neq 0\}$.

Enfin, On peut déduire $Fr(F) = \overline{F} - Int(F) = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1\} \cup \{(x,y) : x = 0\}$.

7. $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x = 1/n, y = 1/m, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$, $Int(G) = \emptyset$ car $(1/n + \sqrt{2}/p, 1/m) \to_{p\to\infty} (1/n, 1/m)$ donc G^c est dense dans $\mathbb{R}^2$.

   Montrons que $\overline{G} = (\{0\} \cup \{(1/n) n \in \mathbb{N}\})^2$ En effet, $T := \{0\} \cup \{(1/n) n \in \mathbb{N}\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ car son complémentaire est $]-\infty, 0[\cup]1,\infty[\cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]1/(n+1), 1/n[$ est ouvert comme union d'ouverts. Donc T^2 est fermé dans $\mathbb{R}^2$, soit $(u_n, v_n) \in T^2$ quelconque tendant vers (u,v), vu T fermé, on a donc $u_n \to u \in T$, $v_n \to v \in T$, donc $(u,v) \in T^2$ c'est à dire T^2 fermé.

   On a donc T^2 est un fermé contenant G on a donc montré $\overline{G} \subset T^2$. Pour l'inclusion inverse, il suffit de remarquer que les suites suivantes de G converge vers les éléments de T^2 non dans G : $(1/n, 1/m) \to_{n\to\infty} (0, 1/m), m \in \mathbb{N}, (1/n, 1/m) \to_{m\to\infty} (1/n, 0), n \in \mathbb{N}, (1/n, 1/n) \to (0,0)$.

8. $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y+z \geq 0\}$ est fermé car $f(x,y,z) = x+y+z$ est continue car linéaire et $H = f^{-1}([0, +\infty[)$. On montre comme pour B, $Int(H) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x+y+z > 0\}$.

9. $I = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x > 0, y \geq 0, z \in]1,2[\cup\{-1/n, \ n \in \mathbb{N}\}\}$ (attention faute de frappe dans l'énoncé), n'est pas fermé car pour $y_0 \geq 0, z_0 \in [1,2] \cup \{-1/n, \ n \in \mathbb{N}\}\}$ $u_m = (1/m, y_0, 1_{R_+}(z)(z_0 - 3/2)(1 - 1/m) + 3/2 + 1_{R_-}(z_0)z_0) \in I$ et $u_m \to (0, y_0, z_0) \notin I$. On obtient de plus $\{0\} \times \mathbb{R}_+ \times [1,2] \cup \{-1/n, \ n \in \mathbb{N}\}$. De même, pour $x_0 \geq 0, y_0 \geq 0$ $(x_0 + 1/n, y_0, 1 + 1/n), (x_0 + 1/n, y_0, 2 - 1/n), (x_0 + 1/n, y_0, -1/n)$ sont dans I et tendent respectivement vers $(x_0, y_0, 1), (x_0, y_0, 2), (x_0, y_0, 0)$ qui ne sont pas dans I. En bilan on a donc obtenu $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \geq 0, y \geq 0, z \in [1,2] \cup \{0\} \cup \{-1/n, \ n \in \mathbb{N}\}\} \subset \overline{I}$. En fait on a égalité, car $Z = p_x^{-1}([0,\infty[) \cap p_y^{-1}([0,\infty[) \cap p_z^{-1}([1,2] \cup \{0\} \cup \{-1/n, \ n \in \mathbb{N}\})$ est fermé comme intersection de trois fermé,, chacun fermé comme image inverse par des applications continues (les projections p_x, p_y, p_z de fermés $(([1,2] \cup \{0\} \cup \{-1/n, \ n \in \mathbb{N}\})^c =]2, +\infty[\cup]0,1[\cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]-1/n, -1/(n+1)[\cup]-\infty, -1[$ est ouvert comme union d'ouverts).

10. $J = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Q} \ : \ x > 0, y \geq 0\}$ n'est ni ouvert ni fermé. Son adhérence est $\overline{J} = \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}$ (qui est un fermé contenant J tel que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}$ on trouve une suite de rationnel $z_n \to z$ par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et on obtient $(x + 1/n, y, z_n) \in J$ qui tend vers (x,y,z))

    $Int(J) = \emptyset$ car pour $(x,y,z) \in J$, $(x, y, z + \sqrt{2}/n) \notin J$ (car $\sqrt{2}$ non rationnel) et tend vers (x,y,z) donc J^c est dense dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4

Soit C un convexe. Soit $x, y \in \overline{C}$ on veut montrer que pour $t \in [0,1] xt + (1-t)y \in \overline{C}$. Prenons des suites $x_n, y_n \in C$ tel que $x_n \to x, y_n \to y$. Comme C est convexe $z_n = tx_n + (1-t)y_n \in C$. Or $z_n \to xt + (1-t)y$ donc $xt + (1-t)y \in \overline{C}$ QED.

Exercice 5 cf TD.

Exercice 6 cf TD.

Exercice 7

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé. Etant donnée une famille non vide $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E, comparer les ensembles $\bigcup_{i\in I} A_i$, $\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$, $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$, d'une part et $\bigcap_{i\in I} A_i$, $\overline{\bigcap_{i\in I} A_i}$, $\bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$, d'autre part. Examiner le cas où I est fini.

Solution : 1. On a

$$\bigcup_{i\in I} A_i \subset \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}.$$

En effet, $A_i \subset \overline{A_i}$ donc on passe à l'union et on a $A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ d'où en passant à l'adhérence :$\overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$ d'où la deuxième inclusion en passant à l'union.

2. Les deux inclusions réciproques sont fausses en général. Pour la première une union à 1 élément A_1 non fermé suffit. Pour la deuxième $A_i =]\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}[$, $\overline{A_i} = [\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}]$ $\cup_{i\geq 1}\overline{A_i} =]0,1]$ n'est pas fermé, cela ne peut pas donc être l'adhérence $\overline{\bigcup_{i\geq 1} A_i} = [0,1]$ (il suffit de voir que 0 est bien dans l'adhérence pour avoir l'égalité).

Enfin, si I FINI $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$ est un fermé comme union fini de fermés, et comme il contient l'union, on a l'autre inclusion d'où $\bigcup_{i\in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i\in I} A_i}$.

3. On a

$$\bigcap_{i\in I} A_i \subset \overline{\bigcap_{i\in I} A_i} \subset \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}.$$

En effet la première inclusion est un résultat général, et comme $\bigcap_{j\in I} A_j \subset A_i$ en passant aux adhérence, on obtient $\overline{\bigcap_{j\in I} A_j} \subset \overline{A_i}$ comme cela est vrai pour tout i on obtient la deuxième inclusion.

4. Les deux réciproques sont fausses même dans le cas fini. Soit $A_1 = \mathbb{Q} \cap [0,1], A_2 = ((\sqrt{2} + \mathbb{Q}) \cap [0,1/2]) \cup (\mathbb{Q} \cap [1/2,1])$ $\overline{A_1} = [0,1], \overline{A_2} = [0,1]$ $A_1 \cap A_2 = (\mathbb{Q} \cap [1/2,1])$ et $\overline{A_1 \cap A_2} = [1/2,1]$

et on a $(\mathbb{Q} \cap [1/2,1]) \neq [1/2,1] \neq [0,1]$.

Exercice 8

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé. Etant donnée une famille non vide $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E, comparer les ensembles $\bigcup_{i\in I} A_i$, $Int(\bigcup_{i\in I} A_i)$, $\bigcup_{i\in I} Int(A_i)$, d'une part et $\bigcap_{i\in I} A_i$, $Int(\bigcap_{i\in I} A_i)$, $\bigcap_{i\in I} Int(A_i)$, d'autre part. Examiner le cas où I est fini.

Solution :

1. Il suffit de passer l'exo. précédent au complémentaire.

$$\bigcap_{i\in I} A_i \supset \bigcap_{i\in I} Int(A_i) \supset Int(\bigcap_{i\in I} A_i)$$

avec les réciproques fausses sauf pour la deuxième dans le cas fini.

2.

$$\bigcup_{i\in I} A_i \supset Int(\bigcup_{i\in I} A_i) \supset \bigcup_{i\in I} Int(A_i)$$

Avec les réciproques fausses même dans le cas fini.

Exercice 9

Soient $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, A et B deux parties non vides de E. On suppose que A est ouvert. Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ et que cette inclusion peut ne pas être vrai si A n'est pas ouvert.

Solution : 1. Soit $x \in A \cap \overline{B}$ il existe donc une suite $x_n \in B$ tel que $x_n \to x$ or vu A ouvert il existe $\epsilon > 0$ tel que $B(x, \epsilon) \subset A$. Comme $x_n \to x$, il existe un rang N tel que pour $n \geq N$ $x_n \in B(x, \epsilon)$, d'où (x_{N+n}) est une suite de $A \cap B$ qui tend vers x c'est à dire $x \in \overline{A \cap B}$

2. Si $A = \mathbb{Q}$, $B = (\sqrt{2} + \mathbb{Q})$, $A \cap B = \emptyset$ et $A \cap \overline{B} = A \not\subset \overline{A \cap B} = \emptyset$.

Exercice 10

Soient $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, A et B deux parties denses dans E. On suppose que A est ouvert. Montrons que $A \cap B$ est dense dans E. Par l'exo précédent vu A ouvert $\overline{A \cap B} \supset A \cap \overline{B} = A$ (vu $\overline{B} = E$). Donc en passant aux adhérences $\overline{A \cap B} \supset \overline{A} = E$.

Exercice 11

Soit E l'ensemble des suites $P = (a_k)$ de $\mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |a_i| < \infty$ et on note :

$$n_1(P) = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

1. Montrer que n_1 est une norme sur E.
2. Soit $P_k^{(n)} = (\frac{1}{k^2} 1_{\{k \leq n\}})$ et $P^{(n)} = (P_k^{(n)}) \in E$. (Si on identifie $\mathbb{R}[X]$ comme les suites finies dans E. $P^{(n)}$ correspond à la suite de polynômes (P_n) de l'exercie 4 du TD 1)
   $(P^{(n)})$ converge t-elle dans E ? (On admettra que $P = (\frac{1}{k^2}) \in E$. cf. MASS 32)

Solution : 1. Comme au TD. 1 $n_1(P) \geq 0$ est évident et $n_1(P) = 0$ implique $a_i = 0$ pour tout i donc $n_1(P) = 0$.

Si $P = (a_k)$ $n_1(\lambda P) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |\lambda a_i| = \lim_{n\to\infty} |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |a_i| = |\lambda| n_1(P)$.

Si $Q = (b_k)$ $n_1(P + Q) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i| \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |a_i| + \sum_{i=1}^{n} |b_i| = n_1(P) + n_1(Q)$.

2. On admettra $(P^{(n)} - P) = (\frac{1}{k^2} 1_{\{k>n\}})$ d'où $n_1(P^{(n)} - P) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \to_{n\to\infty} 0$ comme le reste d'une série convergente (cf. MASS 32 ou utiliser caractérisation du critère de Cauchy de Convergence des suites). Donc $P^{(n)} \to P$.

Exercice 12

Montrons que dans un espace vectoriel normé, un sous espace vectoriel propre n'est jamais ouvert. Il suffit de voir qu'un sev ouvert n'est pas propre, c'est à dire est E lui même. Si un ensemble qui contient 0 est ouvert il contient une boule $B(0, r)$ $r > 0$ si c'est un sev il contient donc les multiples par $\lambda > 0$ de cette boule : $\lambda B(0, r) = B(0, \lambda r)$ c'est à dire n'importe quelle boule de centre 0, il contient donc $E = \cup_{\lambda>0} B(0, \lambda r)$.

Exercice 13 cf TD.

Exercice 14 cf. TD.

Exercice 15

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé et d la distance associée. Soit A une partie non-vide et $d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{A}$.

Solution : Si $d(x, A) = 0$, par définition de l'inf, il existe $a_n \in A$ $d(x, a_n) \leq 1/n$, c'est à dire $a_n \to x$, donc $x \in \overline{A}$.

Réciproquement on a vu en cours que si $x \in \overline{A}$ il existe une suite vérifiant la même propriété, et ceci montre $d(x, A) = 0$.