Université Claude Bernard Mathématiques
L2 MASS 31 2014-2015

Feuille d'exercices numéro 3
Continuité, Compacité.

Exercice 1 Étudier la limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ où $f : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^5+y^5}{x^4+y^4} \qquad f(x,y) = \frac{x\cos(y)}{x^2+y^2} \qquad f(x,y) = \frac{x^2y}{x^3+y^3}.$$

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(0,0) = 0 \text{ et } f(x,y) = \frac{x^4+xy^2}{x^2+xy+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0).$$

Étudier la continuité de cette fonction.

Exercice 3 Soit $\Delta = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $U = \mathbb{R}^2 - \Delta$.

1. Montrer que Δ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. On considère la fonction $f : U \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{sin(x)-sin(y)}{x-y}$. Montrer que la fonction f est continue sur U.
3. Peut-on prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4
Soit $\varphi :]-1,1[\to \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{x}{1-|x|}$. Montrer que φ est un homéomorphisme et déterminer φ^{-1}.

Exercice 5
Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. On considère l'application $\varphi : U \to U$ définie par $\varphi(x,y) = (x,xy)$.

1. Expliquer pourquoi U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que φ est un homéomorphisme et calculer φ^{-1}.

Exercice 6
Soit E un espace vectoriel normé, on note $||.||_1$ et $||.||_2$ deux normes équivalentes sur E et $B_{Fi}(a,r)$ (resp. $B_i(a,r)$) pour $i = 1,2$ les boules fermés (resp. ouvertes) de centre a et rayon r pour les normes $||.||_i$.

1. Soit $a \in E$, $r \in \mathbb{R}, r > 0$. Montrer que les boules $B_i(a,r)$ et $B_i(0,1)$ sont homéomorphes.
2. Soit $f : (E, ||.||_1) \to (E, ||.||_2)$ la fonction définie par $f(x) = \frac{||x||_1}{||x||_2}x, x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est un homéomorphisme tel que $f(B_1(0,1)) = B_2(0,1)$.
3. En déduire que toute boule ouverte non vide de $(E, ||.||_1)$ est homéomorphe à toute boule ouverte non vide de $(E, ||.||_2)$.
4. Montrer de même que toute boule fermée non réduite à un singleton de $(E, ||.||_1)$ est homéomorphe à toute boule fermée non réduite à un singleton de $(E, ||.||_2)$.

Exercice 7

Soient $U = \mathbb{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\subset (\mathbb{R}^2, ||.||_\infty)$, $V = \mathbb{R}^2 - (]-\infty, 0] \times \{0\})$ et $\varphi : U \to V$ définie par $\varphi(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$.

1. Montrer que U et V sont ouverts.
2. Montrer que $\varphi(B(a, r))$ est ouvert pour toute boule ouverte $B(a, r)$ (pour la norme $||.||_\infty$) de centre $a \in U$ et de rayon r inclue dans U
3. Montrer que φ est un homéomorphisme.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Montrer que f n'est pas une fonction uniformément continue. Que dire de $g = f|_{[-1,1]}$?

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$. Montrer que f est une fonction uniformément continue mais pas lipschitzienne.

Exercice 10

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé. Si A est une partie non vide de E, on rappelle que la distance de $x \in E$ à A est définie par $d(x, A) = \inf\{||x - a||, a \in A\}$.

Montrer que pour tout $x, y \in E$ on a $|d(x, A) - d(y, A)| \leq ||x - y||$.

En déduire que $x \mapsto d(x, A)$ est uniformément continue.

Exercice 11

Soit $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé. Soient A est une partie non vide de E, $f : A \to A$ une fonction continue. On suppose que $f \circ f = f$ et que $A \subset \overline{f(A)}$. Montrer que $f = id_A$.

Exercice 12

Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^2 \leq 5\}$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 13

Montrer que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$ n'est pas un compact de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 14

Soient $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé, A et B deux parties compactes de E. Montrer que $A + B$ est compact.