Université Claude Bernard | Mathématiques
L2 MASS 31 | 2014-2015

Feuille d'exercices numéro 4

Dérivées partielles, Équations aux dérivées partielles.

Exercice 1 Calculer les dérivées partielles premières des fonctions définies par les expressions suivantes (on rappellera l'ensemble de définition et de dérivabilité).

$$\sqrt{x^2-y^2}, \quad \ln(x+\sqrt{x^2+y^2}), \quad \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad x^y, \quad x\arcsin\left(\frac{y}{x}\right).$$

Exercice 2 On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(0,0)=0 \text{ et } f(x,y)=\frac{e^{xy}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ si } (x,y)\neq(0,0).$$

1. f est elle continue en $(0,0)$?
2. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 3 Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :$f(x,y)=(x+iy)^p$. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et les calculer.

Exercice 4 On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(0,0)=0 \text{ et } f(x,y)=\frac{x^3y}{x^2-xy+y^2} \text{ si } (x,y)\neq(0,0).$$

1. Montrer que $x^2-xy+y^2=0 \iff (x,y)=(0,0)$.
2. f est elle continue en $(0,0)$?
3. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies en tout point de $\mathbb{R}^2$.
4. f est elle de classe $\mathcal{C}^1$?
5. f est elle de classe $\mathcal{C}^2$? Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 en $(0,0)$.

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :$f(x,y)=xe^{y/x}+ye^{x/y}$.

1. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
2. Calculer (et reconnaître) $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 6 Soient $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y)=y\phi(x^2-y^2).$$

Montrer que, si $x\neq 0$ et $y\neq 0$, alors $\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{f(x,y)}{y^2}$.

Exercice 7

1. Montrer que $\Omega = \{(\rho, \theta) \mid \rho > 0\}$ et $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$.
2. Soient les applications $\Phi : \Omega \to U$ définie par $\Phi(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $F = f \circ \Phi$. Montrer que F a des dérivées partielles premières $\frac{\partial F}{\partial \rho}$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ et les calculer en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
3. On suppose que f est solution sur U de l'équation aux dérivées partielles :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad (1).$$

Quelle équation au dérivées partielles vérifie F ?
4. Trouver toutes les applications $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation (1).

Exercice 8

Résoudre l'équation $\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, à l'aide du changement de variables $X = 3x + y, Y = y$.

Exercice 9

Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(0,0) = 0 \;\text{ et }\; f(x,y) = \exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right) \;\text{ si }\; (x,y) \neq (0,0),$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 10

Soit E un e.v.n. de dimension finie et $||.||$ une norme sur E. Montrer que $f : E \to \mathbb{R}$ la fonction norme $f(x) = ||x||$ n'admet pas de dérivées partielles en $(0,0)$.

Exercice 11

1. Soit $c > 0$. Montrer que la fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\varphi(u,v) = \left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2c}(u-v)\right),$$

est une bijection tel que φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Trouver toutes solutions f de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation :

$$c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0.$$