Université Claude Bernard
L2 MASS 31

Mathématiques
2014-2015

Feuille d'exercices numéro 5

Différentielles, Accroissements finis, Taylor, Fonctions homogènes.

1 Calcul de différentielles avec la définition.

Exercice 1 Soit $X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, Y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$. On note $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$. On rappelle que $||X||_2 = \sqrt{\langle X, X \rangle}$ est la norme euclidienne.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(X) = \langle X, X \rangle$.

Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 2 On rappelle que le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2. Montrer que les fonctions suivantes sont différentiables et calculer leurs différentielles.

1. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ f(z) = z^p, p \in \mathbb{N}$,
2. $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C},\ f(z) = z^{-1}$,
3. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = e^z$.

Exercice 3 Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $||A|| = \max_{ij} |a_{ij}|$. On rappelle qu'on définit ainsi une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ tel que $||AB|| \leq n||A||\ ||B||$.

1. Montrer que $||A||^p \leq n^{p-1}||A||^p$.
2. Soit $f_p : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ la fonction définie par $f_p(X) = X^p$. Montrer que f_2 et f_3 sont différentiables et calculer leurs différentielles.

Exercice 4 Soit $M_n(\mathbb{R})$ munie de la norme de l'exercice 3. On pose $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(R) : A \text{ inversible } \}$.

1. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert.
2. Soit $f : GL_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ la fonction définie par $f(X) = X^{-1}$. Montrer que f est continue.
3. Montrer que f est différentiable et que $df(X).H = -X^{-1}HX^{-1}$.

Exercice 5

1. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et $X_0 \in U$. On suppose que f admet des dérivées partielles en X_0 et que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = 0$.
   Montrer que f est différentiable en X_0 si et seulement si $\lim_{H \to 0} \frac{||f(X_0+H)-f(X_0)||}{||H||} = 0$.
2. Application. On considère la fonction définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \frac{x^p y^q}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ avec soit $p = q = 2$, soit $p = 1, q = 2$. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$. Est elle continue, différentiable en $(0,0)$?

2 Calcul de différentielles.

Dans les exercices suivants, on calculera les différentielles en utilisant des théorèmes comme le théorème de différentiation des fonctions composées, la différentiation des sommes, des produits...

Exercice 6

1. Soit $f : \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(X) = \frac{1}{||X||_2}$. Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Même question avec $f(X) = \frac{\langle X,A\rangle}{||X||_2^2}$ pour $A \in \mathbb{R}^n$.

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\} \to \mathbb{R}^n$ la fonction définie par $f(X) = \frac{X}{||X||_2}$. Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.

3 Autres exercices : Accroissements finis, Taylor, Fonctions homogènes.

Exercice 8

Appliquer le théorème des accroissements finis $f(x,y) = xe^y$ entre $(0,0)$ et (a,b).
En déduire que $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \lambda \in]0,1[,\ e^{\lambda a} = 1 + a(1-\lambda)$.

Exercice 9

Écrire un développement limité à l'ordre 2 (Taylor-Young) des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = \cos(x)\cos(y)$ au voisinage de $(0,0)$.
2. $f(x,y) = y^x$ au voisinage de $(1,1)$.

Exercice 10 Discuter si les fonctions suivantes sont (positivement) homogènes (si oui, donner leur degré) :

$$f_1(x,y) = x^2 + xy + y^3,\ f_2(x,y) = \frac{x^{10/3} + x^{4/3}y^2}{\sqrt{3x+2y}},\ f_3(x,y) = \max(\sqrt{x}, \sqrt{y}).$$

$$f_4(x,y) = \frac{x^2+xy+y^2}{x+y^2},\ f_5(x,y,z) = \frac{x\ln(y/z)}{e^{z/x}y^2}\ f_6(K,L) = K^{2/3} + L^{1/2}K^{1/6} + L^{2/3}e^{K/L}.$$

Exercice 11 Vérifier que les fonctions suivantes sont homogènes en utilisant le théorème d'Euler :$f(x,y) = \ln(1+\frac{x}{y}),\ g(x,y,z) = x^2 + xy + xz$.

Exercice 12

1. Soit $f : \mathbb{R} \times [0,\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = y\sqrt{x}$. Déterminer la courbe $\mathcal{C}_1$ de niveau de f (la courbe $f(x,y) = a$) passant par le point $A_1(1,2)$. ainsi que la tangente à la courbe $\mathcal{C}_1$ au point A_1. Faire de même avec la courbe de niveau passant par $A_2(2,4)$. Que peut on dire (passage s'une courbe à une autre, d'une tangente à une autre) ?
2. Soit f une fonction homogène de degré r, $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ les courbes de niveaux passant par $M_1(a,b), M_2(ta,tb)$. Montrer que les gradients de f en M_1, M_2 sont colinéaires. Qu'en déduire des tangentes aux courbes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ en M_1, M_2 ? Montrer que l'on passe de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_2$ par une homothétie