Université Claude Bernard — Mathématiques
L2 MASS 31 — 2014-2015

Feuille d'exercices numéro 6

Extrema Libres, Formes différentielles.

Exercice 1 Étudier les extrema relatifs éventuels des fonctions suivantes (préciser leur ensemble de définition). Discuter si ce sont des extrema globaux.

1. $f_1(x, y) = x^2 + y^2 + x^3$,
2. $f_2(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$,
3. $f_3(x, y) = \sin(x) + \sin(y) + \cos(x + y)$,
4. $f_4(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xyzy - z$,
5. $f_5(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$,
6. $f_6(x, y) = xe^y + ye^x$,
7. $f_7(x, y) = e^{xy} + e^{-y/x}$,
8. $f_8(x, y) = \ln(x + y) - xy$,
9. $f_9(x, y) = \frac{x^2-y^2}{2} + \frac{y}{x}$

Exercice 2 Même question avec les fonctions :

1. $g_1(x, y) = \frac{x^3+y^3}{6}$
2. $g_2(x, y) = \frac{x^4+y^4}{12}$
3. $g_3(x, y) = (x^2 + y^2) \sin(x^2 + y^2)$
4. $g_4(x, y) = \frac{x^2y^2}{2}$
5. $g_5(x, y) = \cos(xy)$

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que f vérifie l'équation :

$$(A) \quad 2x^2 + 2y^2 - 4x - 4y - f(x, y)^2 + 10 = 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Dans la suite on ne calculera pas explicitement f.

1. En utilisant la relation (A), calculer les relations satisfaites par les dérivées partielles :
$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$
2. Déterminer les points critiques de f.
Si (x_0, y_0) est un tel point critique que vaut $f(x_0, y_0)$.
3. Quelle est la nature des points critiques de f ?

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction ayant un minimum (resp. minimum local) en a. Montrer que pour toute droite Δ de $\mathbb{R}^n$ passant par a, la restriction $f_{|\Delta}$ de f à Δ a un minimum (resp. minimum local) en a. En utilisant la fonction $f(x, y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$ et $a = (0, 0)$, on montrera que la réciproque est fausse.

Exercice 5 Déterminer les points critiques qui ne sont pas des extrema des fonctions suivantes. Lesquels sont des points selles (locaux et globaux) ?

1. $h_0(x, y) = 2x^2y^2 + y^3$
2. $h_1(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy \ a \in \mathbb{R}$
3. $h_2(x, y) = x^2y(x^2y + 2)$
4. $h_3(x, y) = x^2 - y^2 + (x + y)^3$
5. $h_4(x, y) = x^4 - y^4$
6. $h_5(x, y) = x^4 - y^4 + (x + y)^5$
7. $h_6(x, y) = x^2\sqrt{y}$
8. $h_7(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$
9. $h_8(x, y, z) = x^4 + y^4 - z^4 + (z^2 - \sqrt{z^4 + y^4})^3$
10. $h_9(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^3$

Exercice 6 Vérifier que $x \mapsto \ln(x)$ est concave. En déduire que si $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$: alors pour tout $(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\prod_{i=1}^{k} |u_i|^{\frac{1}{p_i}} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}|u_i|.$$

En déduire l'inégalité de Hölder, pour $p > 1$, q l'exposant conjugué tel $1/p + 1/q = 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \leq (\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p)^{1/p} (\sum_{i=1}^{n} |v_i|^q)^{1/q}.$$

En déduire finalement que

$$||u||_p := (\sum_{i=1}^{n} |u_i|^p)^{1/p} = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |u_i v_i| \mid (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n ||v||_q = 1\}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 7

1. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $a_i : U \to \mathbb{R}$ n fonctions de classes $\mathcal{C}^1$. On considère la forme différentielle $\omega = a_1dx_1 + ... + a_ndx_n$. On suppose que ω est une différentielle totale. Rappeler pourquoi ω est une forme fermée.
2. On pose $\omega_1 = xydx + y^2dy$. ω_1 est elle une différentielle totale ?
3. On pose $\omega_2 = ydx + xdy$. Montrer que ω_2 est un différentielle totale et trouver toutes les primitives f tel que $df = \omega_2$.
4. Soit $\omega = df$ une forme exacte sur U. Soit $\gamma : [a, b] \to U$ une application de classe $\mathcal{C}^1$, montrer que :
$$\int_a^b df(\gamma(t)).\gamma'(t)dt = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$
5. Soit $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $\omega = \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$. Montrer que ω est fermée.
Soit $\gamma(t) = (cos(t), \sin(t))$ sur $[0, 2\pi]$. Calculer $\int_0^{2\pi} \omega(\gamma(t)).\gamma'(t)dt$.
En utilisant la question précédente, montrer que ω n'est pas exacte.