Université Claude Bernard Mathématiques
L2 MASS 31 2012-2013

Feuille d'exercices numéro 6 : Correction partielle.

Extrema Libres, Formes différentielles.

Exercice 1

1. 2. 3. 4. 5. cf. TD. Toutes les fonction suivantes sont $\mathcal{C}^\infty$ sur leur domaine.

6. $f_6(x,y) = xe^y + ye^x$, $\frac{\partial f_6}{\partial x}(x,y) = e^y + ye^x$, $\frac{\partial f_6}{\partial y}(x,y) = e^x + xe^y$. Les points critique vérifient $\frac{\partial f_6}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f_6}{\partial y}(x,y)$, c'est à dire $e^x + xe^y = e^y + ye^x = 0$ d'où on tire $x = -e^{x-y} = 1/y$ donc $x < 0$ et donc $\ln(|x|) = x - 1/x = 1/|x| - |x|$ Or $y \mapsto 1/y - y$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (car sa dérivée est $-1/y^2 - 1 < -1 < 0$.) donc ne prend qu'une fois la valeur 0 en 1, comme les signes de ln sont opposées à ceux de cette fonction, on déduit que la seule solution est $x = -1 = y$. Le seul point critique est $(-1,-1)$. $\frac{\partial^2 f_6}{\partial x^2}(x,y) = ye^x$, $\frac{\partial^2 f_6}{\partial y^2}(x,y) = xe^y$, $\frac{\partial^2 f_6}{\partial x \partial y}(x,y) = e^x + e^y$. La matrice Hessienne en $(-1,-1)$ est donc $Hf_6(-1,1) = \begin{pmatrix} -e^{-1} & 2e^{-1} \\ 2e^{-1} & -e^{-1} \end{pmatrix}$. On a donc $rt - s^2 = e^{-1}(1-4) < 0$, f_6 n'a donc pas d'extremum, $(-1,-1)$ est un point selle.

7. $f_7(x,y) = e^{xy} + e^{-y/x}$, $D(f_7) = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ $\frac{\partial f_7}{\partial x}(x,y) = ye^{xy} + ye^{-y/x}/x^2$, $\frac{\partial f_7}{\partial y}(x,y) = xe^{xy} - e^{-y/x}/x$. Un point critique vérifie $ye^{xy} + ye^{-y/x}/x^2 = xe^{xy} - e^{-y/x}/x = 0$, en particulier $e^{-y/x} = x^2e^{xy}$ et $2ye^{xy} = 0$ d'où $y = 0$ puis $x = 1/x$ soit $x = 1$ ou -1. f_7 a donc deux points critiques $(1,0)$ et $(-1,0)$.
$\frac{\partial^2 f_7}{\partial x^2}(x,y) = y^2e^{xy} + e^{-y/x}(y^2 - 2xy)/x^4$, $\frac{\partial^2 f_6}{\partial y^2}(x,y) = x^2e^{xy} + e^{-y/x}/x^2$, $\frac{\partial^2 f_6}{\partial x \partial y}(x,y) = (xy+1)e^{xy} + (x-y)e^{-y/x}/x^3$. D'où $Hf_6(\pm 1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. $rt - s^2 = -4 < 0$; $(\pm 1, 0)$ sont des points selles (donc pas des extrema).

8. $f_8(x,y) = \ln(x+y) - xy$, $D(f_8) = \{(x,y) \mid x+y > 0\}$ $\frac{\partial f_8}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x+y} - y$, $\frac{\partial f_8}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x+y} - x$. Les points critiques vérifient $\frac{1}{x+y} = y = x$ d'où $2x^2 = 1$ soit $x = 1/\sqrt{2}$ ou $x = -1/\sqrt{2}$. Les points critiques sont donc $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ et $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$.
$\frac{\partial^2 f_8}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2} = \frac{\partial^2 f_8}{\partial y^2}(x,y)$, $\frac{\partial^2 f_8}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{1}{(x+y)^2} - 1$.
On a donc $Hf_8(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = Hf_8(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. $rt - s^2 = 1/4 - 9/4 = -2 < 0$. Les deux points critiques sont des points selles (pas d'extremum).

9. $f_9(x,y) = \frac{x^2-y^2}{2} + \frac{y}{x}$
$\frac{\partial f_9}{\partial x}(x,y) = x - \frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial f_9}{\partial y}(x,y) = -y + \frac{1}{x}$.
Les points critiques satisfont $y = 1/x = x^3$, d'où $x^4 = 1$. Les points critiques sont donc $(1,1)$ et $(-1,-1)$.
$\frac{\partial^2 f_9}{\partial x^2}(x,y) = 1 + 2\frac{y}{x^3}$, $\frac{\partial^2 f_9}{\partial y^2}(x,y) = -1$, $\frac{\partial^2 f_9}{\partial x \partial y}(x,y) = -\frac{1}{x^2}$.
$Hf_9(1,1) = Hf_9(-1,-1) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. $rt - s^2 = -3 - 1 < 0$ Les deux points critiques sont des points selles (pas d'extremum locaux).

Exercice 2

1. 2. cf TD.

3. $g_3(x,y) = (x^2+y^2)\sin(x^2+y^2) = g(x^2+y^2)$ avec $g(R) = R\sin(R)$.
4. $g_4(x,y) = \frac{x^2y^2}{2}$ Les points critiques sont les droites $x=0$ et $y=0$. La hessienne y est nulle. La hessienne est négative sur les axes $(x, \pm x)$. Donc g_4 n'est pas convexe mais $g_4(x,0) = g_4(0,y) = 0$ et $g_4 \geq 0$ tous les points critiques sont des minima globaux.
5. $g_5(x,y) = \cos(xy)$ $\frac{\partial g_5}{\partial x}(x,y) = -y\sin(xy)$, $\frac{\partial g_5}{\partial y}(x,y) = -x\sin(xy)$. Les points critiques vérifient $y\sin(xy) = x\sin(xy) = 0$. Ceci est vérifié pour $x=0$, ou $y=0$ ou $\sin(xy)=0$ ce qui contient en plus les hyperboles $xy = k\pi, k \in \mathbb{Z}^*$. On a donc une infinité de points critiques. $\frac{\partial^2 g_5}{\partial x^2}(x,y) = -y^2\cos(xy)$, $\frac{\partial^2 g_5}{\partial x^2}(x,y) = -x^2\cos(xy)$, $\frac{\partial^2 g_5}{\partial x \partial y}(x,y) = -\sin(xy) - xy\cos(xy)$.
   On a $Hg_5(x, 2k\pi/x) = \begin{pmatrix} -4k^2\pi^2/x^2 & 2k\pi \\ 2k\pi & -x^2 \end{pmatrix}$. $rt - s^2 = 4k^2\pi^2 - 4k^2\pi^2 = 0$ Le Th ne conclut pas mais $g_5(x, 2k\pi/x) = 1$ est donc c'est maximum global vu g_5 à valeur $[-1,1]$.
   De même $g_5(x, (2k+1)\pi/x) = -1$ sont les points atteignant un minimum global.
   $g_5(0,y) = g_5(x,0) = 1$ sont aussi des max globaux.

Exercice 3 (non résolu)

Exercice 4 $f(x,y) = (x^2-y)(3x^2-y)$ $f(x,2x^2) = -x^4$ a un maximum en 0. Donc f ne peut pas avoir de minimum en 0.

Exercice 5 Déterminer les points critiques qui ne sont pas des extrema des fonctions suivantes. Lesquels sont des points selles (locaux et globaux) ?

1. $h_0(x,y) = 2x^2y^2 + y^3$ Points critiques pour $4xy^2 = 0 = y(3y+4x^2)$. Les points critiques sont les $(x,0)$. La hessienne en (x,y) est : $Hh_0(x,y) = \begin{pmatrix} 4y^2 & 8xy \\ 8xy & 4x^2+6y \end{pmatrix}$, soit en $(x_0,0)$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4x_0^2 \end{pmatrix}$, $rt - s^2 = 0$ donc le th ne conclut pas. Pour $|y| < x^2$, $h_0(x,y) = y^2(2x^2+y) > y^2x^2 \geq 0$ d'où $(x,0)$ est un minimum local pour $x \neq 0$. Pour $x \neq 0$, $(x,0)$ est un maximum local de $x \mapsto f(x,0) = 0$, c'est donc aussi un point selle.
   Vu que $h_0(ax,x) = 2a^2x^4 + x^3 = x^3(1+2a^2x)$, sont négatifs pour $x<0$ et positifs pour $x>0$ (resp $x<0$). Donc les droites $ay = x$ sont des droites d'inflexion en $(0,0)$, qui n'est donc pas un point selle (par def, il n'y a pas d'autre droite que $x=0$ ayant un extremum en $(0,0)$).
2. $h_1(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$ $a \in \mathbb{R}$ Les points critiques satisfont $x^2 = ay$ $y^2 = ax$ d'où deux cas
   Si $a=0$ (0,0) est le seul point critique, la hessienne est nulle en $(0,0)$ et sur la droite $y = bx$ $h_1(x,bx) = x^3(1+b^3)$, c'est donc une droite d'inflexion donc $\mathbb{R}^2$ est un plan d'inflexion, pas de point selle ni d'extrema.
   Si $a \neq 0$, les points critiques satisfont $y^4/a^2 = ay$, soit $y=0$, $y=a$. Les points critiques sont $(0,0)$ et (a,a). La hessienne vaut $Hh_1(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3a \\ -3a & 6y \end{pmatrix}$.
   Donc $Hh_1(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3a \\ -3a & 0 \end{pmatrix}$ de déterminant négatif, on a donc un point selle local en (0,0).
   $Hh_1(a,a) = \begin{pmatrix} 6a & -3a \\ -3a & 6a \end{pmatrix}$ $rt - s^2 = 27a^2 > 0$ (a,a) est un minimum local si $a>0$ et un maximum local si $a<0$. Il ne sont pas globaux car $h_1(x,0) \to_{x\to\pm\infty} \pm\infty$.