Université Claude Bernard | Mathématiques
L2 MASS 31 | 2014-2015

Feuille d'exercices numéro 7
Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites, extrema liés.

Exercice 1 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x, y^3, z^5)$.

1. Calculer la matrice jacobienne de f. En quels points f vérifie t elle les hypothèses du théorème d'inversion locale ?
2. Montrer que f est un homéomorphisme.

Exercice 2

1. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ n'est pas un difféomorphisme.
2. Soit l'ouvert $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ de $\mathbb{R}^2$.
   Montrer que $f_{|U}$ est un difféomorphisme de U dans un ouvert V de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3
Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ l'application définie par $f(X) = X^2$

1. Montrer que $df(I_n)$ est inversible.
2. En déduire qu'il existe des ouverts U et V avec $I_n \in U, I_n \in V$ tels que pour tout $B \in V$ l'équation $X^2 = B$ ait une unique solution dans U.

Exercice 4 Soient $a > 0, b > 0, c > 0$

1. A quelle condition la relation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ définit elle une fonction $z = \varphi(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.
   Calculer les dérivées partielles de φ.
2. Calculer explicitement φ.

Exercice 5 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer, en utilisant le théorème des fonctions implicites, que f ne peut pas être injective.

Exercice 6 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$.

1. Montrer que la relation $f(x, y) = 0$ définit au voisinage de 0 une fonction implicite $\varphi(x)$ telle que $\varphi(0) = 1$.
2. Donner un développement limité de φ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 7 On considère la courbe de $\mathbb{R}^3$ définie par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{c} x^2 - yz = 0 \\ 3x^2 - y - 2z = 0 \end{array} \right.$$

1. Montrer qu'au voisinage de $(1, 1, 1)$, on peut paramétrer cette courbe par x.
2. Trouver la tangente à cette courbe en $(1, 1, 1)$.

Exercice 8

Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par $f(x,y) = xy$ et $g(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 4$

1. Trouver les points de $\mathbb{R}^2$ où f est susceptible d'atteindre un extremum sous la contrainte $g(x,y) = 0$. Trouver le multiplicateur de Lagrange en chacun de ces points.
2. Montrer que la courbe $g(x,y) = 0$ est compacte.
3. En déduire par exhaustion les extrema globaux de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$..

Exercice 9

Soient $f, g :]-1, \infty[^2 \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{4}$ et $g(x,y) = x^2y^2 + 7xy - 8$.

1. Trouver le Lagrangien du problème de minimisation de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$ et ses points critiques.
2. Donner la matrice hessienne du Lagrangien.
3. En utilisant les conditions du second ordre, trouver les minima locaux et globaux de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.
4. Trouver les minima locaux de f sous la condition $g(x,y) < 0$ et $x > -1$, en déduire les minima locaux de f sous la condition $g(x,y) \leq 0$ et $x > -1$.
5. Trouver les minima locaux de f sous la condition $g(x,y) > 0$ et $x > -1$, en déduire les minima locaux de f sous la condition $g(x,y) \geq 0$ et $x > -1$.

Exercice 10

Trouver les extrema eventuels de la fonction $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

1. soumise à la condition :
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{25} = 1$$
2. soumise aux conditions :
$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{25} = 1 \\ z = x + y \end{cases}$$

Exercice 11 Soit $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0, y > 0\}$ Soient $f, g_r : U \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$ et $g_r(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - r$ $(r > 0)$

1. Trouver les extrema locaux de f sous la contrainte $g_r(x,y,z) = 0$.
2. Trouver les extrema locaux de f sous la contrainte $g_1(x,y,z) \geq 0$.