Université Claude Bernard | Mathématiques
L2 MASS 31 | 2012-2013

Feuille d'exercices numéro 7
Correction partielle.

Exercice 9

Soient $f, g :]-1,\infty[^2 \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^4}{4}$ et $g(x,y) = x^2y^2 + 7xy - 8$.

1. Le Lagrangien est $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.
   On trouve ces points critiques (avec $x > -1, y > -1$) en résolvant le système d'équations $\frac{\partial L}{\partial x} = x + \lambda(2xy^2 + 7y) = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y} = y^3 + \lambda(2yx^2 + 7x) = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2y^2 + 7xy - 8 = 0$.
   La dernière équation s'écrit $(xy + 8)(xy - 1) = 0$. On a donc deux cas :
   Cas $xy = 1$ on a donc $x \neq 0$ et en remplaçant y par $1/x$ $x + \lambda 9/x = 0$ et $1/x^3 + \lambda 9x = 0$ soit $\lambda = -x^2/9 = -1/9x^4$ donc $x^6 = 1$ d'où $x = \pm 1$ la seule solution avec $x > -1$ est $x = 1, y = 1, \lambda = -1/9$.
   Cas $xy = -8$. On a de même $x - 8\lambda 9/x = 0$ et $-8^3/x^3 + \lambda 9x = 0$ soit $\lambda = -x^2/(8\times 9) = -8^3/9x^4$ d'où $x^6 = 8^4 = 4^6$ et $x = \pm 4$, $x = -4 < -1$ est exclu et pour $x = 4$, $y = -2 < -1$ est aussi exclu.
   Bilan, le seul point critique de L sur $]-1,\infty[^2 \times \mathbb{R}$ est $(1, 1, -1/9)$.
2. La hessienne du Lagrangien est
$$HL(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda y^2 & 7\lambda & 2xy^2 + 7y \\ 7\lambda & 3y^2 + 2\lambda x^2 & 2yx^2 + 7x \\ 2xy^2 + 7y & 2yx^2 + 7x & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Vu que $\nabla g \neq 0$ sur la contrainte, le théorème des multiplicateurs de Lagrange dit que les extrema sont parmi les points critiques du Lagragien.
   On calcule
$$\det(HL(1, 1, -1/9)) = \det \begin{pmatrix} 7/9 & -7/9 & 9 \\ -7/9 & 25/9 & 9 \\ 9 & 9 & 0 \end{pmatrix} = 9/9^2 \det \begin{pmatrix} 7 & -7 & 1 \\ -7 & 25 & 1 \\ 81 & 81 & 0 \end{pmatrix} = 9 \det \begin{pmatrix} 7 & -7 & 1 \\ -7 & 25 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   Où on a utilisé la multilinéarité du déterminant sur les colonnes puis sur les lignes D'où $\det(HL(1, 1, -1/9)) = 9(-14 - 25 - 7) < 0$ donc la condition du second ordre indique que $(1, 1)$ est l'unique minimum local (qui est strict) de f sur $]-1,\infty[^2 \cap \{g(x, y) = 0\}$ de valeur $f(1, 1) = 3/4$. **Ce minimum est global.** En effet sur $B_\infty((0, 0), 2)^c$ on a soit $|x| > 2$ soit $|y| > 2$ d'où $f(x, y) \geq 2 > f(1, 1)$. Et sur le compact $[-1,\infty[^2 \cap B_{F\infty}((0, 0), 2) \cap \{g(x, y) = 0\}$ par continuité de f, f est bornée et atteint ses bornes, donc vu que le minimum ne peut être atteint sur $B_\infty((0, 0), 2)^c$ ni pour $x = -1, y > -1$, $y = -1, x > 1$ en comparant avec la valeur connu $f(1, 1) = 3/4$, on en déduit qu'il est atteint soit en $(-1, -1)$ soit sur $]-1,\infty[^2 \cap B_\infty((0, 0), 2) \cap \{g(x, y) = 0\}$. Dans ce deuxième cas le théorème s'applique pour dire que le seul minimum possible est en $(1, 1)$. On voit donc que les deux minima de f sur théorème $[-1,\infty[^2 \cap B_{F\infty}((0, 0), 2) \cap \{g(x, y) = 0\}$ sont en $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ de même valeur. En bilan sur $]-1,\infty[^2 \cap B_{F\infty}((0, 0), 2) \cap \{g(x, y) = 0\}$, (1,1) est donc l'unique minima qui est donc global.

4. Les minima locaux de f sous la condition $g(x,y) < 0$ et $x > -1, y > -1$ consitue un pb d'extrema libre sur un ouvert. 0n cherche donc les points critiques de f La condition est $(x, y^3) = (0,0)$ c'est à dire $x = y = 0$ qui vérifie bien $g(0,0) = -8 < 0$ donc Sous les présentes conditions f ne peut avoir un extrema qu'au point critique $(0,0)$ La hessienne de f est de déterminant nul en ce point mais f est facilement convexe (par somme de fonction convexe une variable ou $Hf = diag(1, 3x^2)$ positiv, donc il s'agit d'un minimum global (nécéssairement strict comme il est unique).

   Déduisons en les minima locaux de f sous la condition $g(x,y) \leq 0$ et $x > -1, y > -1$. Si il vérifie $g(x,y) < 0$ un tel minima est forcément un minima local de f du cas précédent, donc $(0,0)$ et le seul candidat, si il vérifie $g(x,y) = 0$, c'est forcément un extremum local du problème sous contrainte, le seul candidat est $(1,1)$. En comparant les valeurs $f(0,0) = 0 < f(1;1) = 3/4$, $(0,0)$ est l'unique minima global donc un extrema local. Il n'est pas évident que $(1,1)$ soit encore un minima local avec la contrainte $g(x,y) \leq 0$, en fait on va voir que ce n'en est pas un en regardant $f(x,x) = x^2/2 + x^4/4$ qui est clairement strictement croissante sur $]0,\infty[$ donc pour tout ϵ il existe η proche dans $]1-\epsilon, 1[$ tel que $f(\eta,\eta) < f(1,1)$ et on a bien $g(\eta,\eta) = (\eta^2 - 1)(\eta^2 + 8) < 0$.

5. De même qu'à la question précédente trouver les minima locaux de f sous la condition $g(x,y) > 0$ et $x > -1, y > -1$, est un problème d'extrema libre, il n'y a pas de solution car le seul point critique de f $(0,0)$ n'est pas dans l'ouvert. En raisonnant comme à la question précedente le seul minima local possible de f sous la condition $g(x,y) \geq 0$ et $x > -1, y > -1$ est $(1,1)$. On va voir cette fois que c'est bien un minimum local et même global de f sous la contrainte que nous considérons. L'une des méthodes est de faire comme à l'exercice 1 du TD 8 et de chercher les extrema de f sous la contrainte $g(x,y) = r$ pour $r > 0$, on voit alors que les valeurs $f(X_r, Y_r)$associés sont $> 3/4$. Nous allons ici utiliser une inégalité directe. La contrainte $g(x,y) \geq 0$ se divise en deux cas $xy \geq 1$ ou $xy \leq -8$ Dans le premier cas $x, y > 0$ (vu la condition $x > -1$) il faut montrer que si $y > 1/x$, on a $f(x,y) > 3/4$ mais $f(x,y) > x^2/2 + 1/4x^4 = g(x)$. La fonction précédente g est croissante pour $x - 1/x^5 > 0$ c'est à dire pour $x > 1$ (si on suppose en plus $x > 0$) donc sur $]0,\infty[$ elle atteint un minimum en 1 de valeur $3/4$, on en déduit l'inégalité voulue $f(x,y) > 3/4$ et donc $(1,1)$ est un minimum local strict sous la condition $g(x,y) \geq 0$, $x > -1, y > -1$.

   Pour voir que c'est un minimum global il reste à traiter le cas $xy < -8$ qui se subdivise en $x < 0$ $y > -8/x$ et $y < 0$ $x > -8/y$.

   Si $x < 0$ $y > -8/x > 0$ $f(x,y) > x^2/2 + 8^4/4x^4 > x^2/2 + 1/4x^4 > 3/4$ pour $|x| \neq 1$ d'après l'étude de variation qui précède.

   Si $y < 0$ $x > -8/y > 0$ $f(x,y) > 8^2/2y^2 + y^4/4 = h(y)$ h est croissante sur $-8^2/y^3 + y^3 > 0$ c'est à dire vu $y < 0$ pour $y^6 < 8^2$ soit $y < -4$, pour $y \in]-1, 0[$ h est donc décroissante d'où $h(y) > h(-1) = 32 + 1/4 > 3/4$ ce qui conclut.

Exercice 10

Trouvons les extrema eventuels de la fonction $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

1. soumise à la condition :

$$g(x,y,z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0$$

   Le lagrangien est $L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$. On trouve les points critiques : $2x + \lambda x/2 = 2y + \lambda 2y/25 = 2z + \lambda 2z/25 = g(x,y,z) = 0$ On a donc $x = 0$ ou $\lambda = -4$, $y = 0$ ou $\lambda = -1/25$ ou $z = 0$ ou $\lambda = -1/25$ Comme $x = y = z = 0$ est impossible si $g = 0$

Donc soit $\lambda = -4$ et alors $y = z = 0$ et donc $g(x, 0, 0) = 0 = x^2 - 4$ c'est à dire $x = \pm 2$. Soit $\lambda = -1/25$ et alors $x = 0$ et $g(0, y, z) = 0 = y^2 + z^2 - 25$.
On a donc une infinité de point critique pour L, à savoir $(2, 0, 0, -4)$, $(-2, 0, 0, -4)$ et les points d'un cercle $C = \{(0, y, z, -1/25), \mid y^2 + z^2 = 25\}$.
Le fermé $g^{-1}(\{0\})$ (comme image réciproque d'un fermé par une application continue) est aussi compact : car si $g(x, y, z) = 0$ implique $x^2 \leq 4$, $y^2, z^2 \leq 25$ d'où $g^{-1}(\{0\}) \subset [-2, 2] \times [-5, 5] \times [-5, 5]$ est borné.
f atteint donc ses bornes sous la condition $g(x, y, z) = 0$, comme $\nabla g(x, y, z) = (x/2, 2y/25, 2z, 25) \neq (0, 0, 0)$ sous la contrainte, le théorème des multiplicateurs de Lagrange s'applique et tous les extrema sont parmi les points critiques du Lagrangien, il suffit donc de comparer les valeurs de f aux points critiques. $f(\pm 2, 0, 0) = 4$ et $f(0, y, z) = 25$ pour $(0, y, z, -1/25) \in C$, $(\pm 2, 0, 0)$ sont donc les minima globaux stricts et les points de C des maxima globaux (non stricts vu que C n'est pas discret)
Examinons ce que donne la condition de second ordre : comme le maximum n'est pas strict sur C, on est forcément dans le cas où elle ne conclut pas. La hessienne du Lagrangien est

$$HL(x, y, z, \lambda) = \begin{pmatrix} 2 + \lambda/2 & 0 & 0 & x/2 \\ 0 & 2 + 2\lambda/25 & 0 & 2y/25 \\ 0 & 0 & 2 + 2\lambda/25 & 2z/25 \\ x/2 & 2y/25 & 2z/25 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve donc

$$\det HL(0, y, z, -\frac{1}{25}) = \det \begin{pmatrix} \frac{99}{50} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2y/25 \\ 0 & 0 & 0 & 2z/25 \\ 0 & 2y/25 & 2z/25 & 0 \end{pmatrix} = \frac{99}{50} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2y/25 \\ 0 & 0 & 2z/25 \\ 2y/25 & 2z/25 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

comme attendu. On trouve aussi

$$HL(\pm 2, 0, 0, -4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 42/25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 42/25 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

de déterminant $-(42/25)^2 < 0$ De plus $(0, 1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1, 0)$ sont clairement une base de l'orthogonal au gradient de la contrainte, on retrouve donc vu $42/25 > 0$ qu'on a une minimum local strict en $(\pm 2, 0, 0, -4)$ avec le corollaire de la condition du second ordre avec deux contraintes. On retrouve aussi facilement le résultat avec le critère du second ordre lui même, la hessienne partielle restriente à l'orthogonal est $42/25 I_2$ est donc une matrice positive.

2. soumise aux conditions :

$$\begin{cases} g(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{25} - 1 = 0 \\ h(x, y, z) = z - (x + y) = 0 \end{cases}$$

Le lagrangien est$L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$.
Les points critiques de L vérifient $2x + \lambda x/2 - \mu = 2y + \lambda 2y/25 - \mu = 2z + \lambda 2z/25 + \mu = z - x - y = g(x, y, z) = 0$. Donc $\mu = x(2 + \lambda/2) = y(2 + 2\lambda/25) = -z(2 + 2\lambda/25)$. En particulier

soit $y = -z$ soit $\lambda = -1/25$. Si $y = -z$ d'où $x = z - y = 2z$ donc avec $g(2z, -z, z) = z^2(27/25) - 1 = 0$ d'où $z = \pm 5/3\sqrt{3}$ On a alors $(4 + \lambda) = -(2 + 2\lambda/25)$ soit $\lambda = -50/9$. Donc $(10/3\sqrt{3}, 5/3\sqrt{3}, -5/3\sqrt{3}, -50/9, -70/27\sqrt{3})$ et $(10/3\sqrt{3}, -5/3\sqrt{3}, 5/3\sqrt{3}, -50/9, -70/27\sqrt{3})$ sont deux points critiques de L.

Si $\lambda = -1/25$ donc $\mu = 0 = x$ et donc $y = z$ et $2y^2 = 25$. $(0, 5/\sqrt{2}, 5/\sqrt{2}, -1/25, 0)$ et $(0, -5/\sqrt{2}, -5/\sqrt{2}, -1/25, 0)$sont donc 2 autres points critiques de L

Comme $h^{-1}(\{0\}) \cap g^{-1}(\{0\})$ est fermé comme intersection de fermés et bornés par la question précédente, l est compact, donc f atteint ses bornes sous la contrainte $h = g = 0$.

$\nabla h(x, y, z) = (-1, -1, 1)$, $\nabla g(x, y, z) = (x/2, 2y/25, 2z/25)$ vu qu'ils sont non nuls sur $g = 0$ ces vecteurs sont linéairement dépendants si $\nabla g(x, y, z) = (-a, -a, a)$ c'est à dire $x = -2a, y = -25a/2, z = 25a/2$ ce qui vérifie $z = x+y$ que pour $a = 0$ ce qui n'est pas possible si $g(x, y, z) = 0$. En conséquence $\nabla h(x, y, z)$ et $\nabla g(x, y, z)$ sont linéairement indépendants sur l'ensemble des contraintes donc par le théorème des multiplicateurs de Lagrange les extrema atteints sont parmi les points critique de L Or $f(0, \pm 5/\sqrt{2}, \pm 5/\sqrt{2}) = 25$ est la valeur d'un maximum glocal (localement strict) de f restreint à la contrainte $g = h = 0$. $f(10/3\sqrt{3}, \pm 5/3\sqrt{3}, \mp 5/3\sqrt{3}) = 150/27$ est la valeur d'un minimum glocal (localement strict) de f restreint à la contrainte $g = h = 0$.

Exercice 11 Soit $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0, y > 0\}$ Soient $f, g_r : U \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$ et $g_r(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r$ $(r > 0)$

1. Trouvons les extrema de f sous la contrainte $g_r(x, y, z) = 0$.

   Le lagrangien est $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g_r(x, y, z)$, ces points critiques vérifient :

   $2x + yz + 2\lambda x = 2y + xz + 2\lambda y = 2z + xy + 2\lambda z = 0 = g_r(x, y, z)$.

   En passant au carré les trois premières relations (par exemple $x^2(1+\lambda)^2 = y^2z^2/4$ et additionant, on obtient $4(x^2 + y^2 + z^2)(1 + \lambda)^2 = y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2$ soit avec la contrainte $g_r = 0$ $y^2z^2 + x^2z^2 + x^2y^2 = 4r(1 + \lambda)^2$ Or la contrainte (se rappeler $r > 0$) implique que l'on ne peut pas avoir à la fois $x = y = z = 0$ d'où on obtient $(1 + \lambda)^2 \neq 0$. on a donc $x = -yz/2(1 + \lambda)$, $y = -xz/2(1 + \lambda)$,$z = -xy/2(1 + \lambda)$ En insérant la formule pour x dans celle pour y et z on obtient : $y(1 - z^2/4(1 + \lambda)^2) = 0$ et $z(1 - y^2/4(1 + \lambda)^2) = 0$ D'où soit $y = 0$ et alors on obtient une contradiction car soit $z \neq 0$ impossible car sinon on aurait $x = y = z = 0$ incompatible avec la contrainte, soit $y^2 = 4(1 + \lambda)^2 = 0$ impossible par ce qu'on a vu pour λ.

   Donc on a $y^2 = z^2 = 4(1 + \lambda)^2$ et $x^2 = y^2z^2/4(1 + \lambda)^2 = 4(1 + \lambda)^2$, donc comme on demande $y > 0$, $y = 2|1 + \lambda|$ et $x < 0$, $x = -2|1 + \lambda|$.

   Enfin $z = -xy/2(1 + \lambda) = 4(1 + \lambda)^2/2(1 + \lambda) = 2(1 + \lambda)$.

   Reste à utiliser la contrainte pour trouver λ :

   $12(1 + \lambda)^2 = r$ d'où $\lambda = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{3}} - 1 =: \lambda_\pm$.

   Les points critiques de L sont donc : $(-\sqrt{\frac{r}{3}}, \sqrt{\frac{r}{3}}, \sqrt{\frac{r}{3}}, \lambda_+) = (X_+(r), \lambda_+)$ et $(-\sqrt{\frac{r}{3}}, \sqrt{\frac{r}{3}}, -\sqrt{\frac{r}{3}}, \lambda_-) = (X_-(r), \lambda_-)$.

   $g_r = 0$ est une sphere de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon r donc un fermé borné c'est à dire un compact, f atteint donc ces minimum et maximum sur $g_r = 0$. Par ailleurs, $\nabla g_r = 2(x, y, z) \neq 0$ (donc forme une famille linéairement indépendante) sur la contrainte donc le théorème des multiplicateurs de Lagrange s'applique et les extrema de f sont atteints aux points critiques de L.

   $$f(X_+(r)) = 3r/3 - \frac{r}{3}\sqrt{\frac{r}{3}} =: h_+(r) < h_-(r) := 3r/3 + \frac{r}{3}\sqrt{\frac{r}{3}} = f(X_-(r)).$$

Donc sous la contrainte $g_r(x,y,z) = 0, x < 0, y > 0$, f atteint son minimum global strict en $X_+(r)$ et son maximum global en $X_-(r)$

2. Trouvons les extrema de f sous la contrainte $g_1(x,y,z) \geq 0$.
   Si un point (x,y,z) est un extremum local et vérifie $g_1(x,y,z) > 0$ c'est un extrema local libre de f, et si il vérifie $g_1(x,y,z) = 0$ c'est un extrema lié (mais attention, un tel extrema lié à la contrainte $g_1(x,y,z) = 0$ peut ne plus être un extrema lié sous la contrainte $g_1(x,y,z) \geq 0$ comme on va voir).
   On doit donc d'abord résoudre le problème d'extrema libre dans l'ouvert $V = \{(x,y,z) \mid g_1(x,y,z) > 0x < 0, y > 0\}$. On cherche les points critiques, ils vérifient les trois premières équations du 1 avec $\lambda = 0$ donc on trouve $(-2,2,2)$ comme unique point critique dans U qui est bien dans U.
   On peut calculer les dérivées secondes de f en $(-2,2,2)$:

$$HL(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & z & y \\ z & 2 & x \\ y & x & 2 \end{pmatrix}.$$

   Donc

$$A = HL(-2,2,2) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Montrons que cette matrice A n'est ni positive ni négative en utilisant le critère du cours. Il suffit de voir que $\det(A - \lambda I_3)$ a une racine pour $\lambda > 0$ et une racine pour $\lambda < 0$.
   Or

$$\det(A-\lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)^3 - 2\times 8 - 4\times 3(2-\lambda) = -(4-\lambda)^2(2+\lambda).$$

   (par exemple pour factoriser rapidement on trouve -2 et 4 comme racine et on trouve la dernière racine en évaluant en 0). Vu la valeur propre $4 > 0$ A n'est pas négative, vu la valeur propre $-2 < 0$, A n'est pas positive. $(-2,2,2)$ n'est donc pas un extremum mais un point selle.
   Les extrema locaux sous la conditions $g_1 \geq 0$, sont donc parmi ceux sous la contrainte $g_1 = 0$. Nous allons voir que $X_+(1)$ reste un minimimum local strict (non global) sous la contrainte $g_1 \geq 0$ mais que $X_-(1)$ n'est plus un maximum local sous la contrainte $g_1 \geq 0$.
   En effet, Considérons $h_-(r) = f(X_-(r))$, $h'_-(r) = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{3}} \geq 1$ vu $r \geq 1$ donc h_- est croissante en r, donc pour tout $\epsilon > 0$, $f(X_-(1+\epsilon) > f(X_-(1))$ et comme $X_-(1+\epsilon) \to X_-(1)$ pour $\epsilon > 0$ on en déduit que $X_-(1)$ n'est pas un maximum local.
   Par ailleurs, Considérons $h_+(r) = f(X_+(r))$, $h'_+(r) = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{3}} \geq 0$ si et seulement si $r \leq 12$ donc h_+ est croissante sur $[1,12]$ atteint son maximum en 12 et tend vers $-\infty$ quand r tend vers ∞ (remarquer $X_+(12) = (-2,2,2)$ est exactement le point selle pour lequel on retrouve que dans la direction tangente à la courbe $X_+(r)$ on a un maximum local et un minimum local dans la direction tangente à la contrainte $g_{12} = 0$). On trouve donc que le minimm ne peut pas être global car $f(X_+(r)) \to -\infty$ pour $r \to \infty$.
   Mais si on considère l'anneau $W = \{(x,y,z) | g_1(x,y,z) \geq 0, g_{12}(x,y,z) \leq 0, x < 0, y > 0\}$ sur chaque quart de sphère $\{g_r(x,y,z) = 0\} \cap U$, $r \in [1,12]$ on a $f(x,y,z) \geq f(X_+(r)) \geq f(X_+(1))$ donc $X_+(1)$ est un minimum de f sur W, et on trouve B une boule de centre $X_+(1)$ tel que $\bar{V} \cap B \subset W$, d'où $X_+(1)$ minimum local sous la contrainte $g_1 \geq 0$.