Feuille d'exercices numéro 8

Intégrales dépendant d'un paramètre.

Exercice 1

Soient $f(x) = (\int_0^x e^{-t^2} dt)^2$ et $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

1. Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$.
2. Montrer que $f'(x) + g'(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, en déduire la valeur de $f(x) + g(x)$.
3. En déduire que $(\int_0^\infty e^{-t^2} dt) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 2

On pose $F(x) = \int_0^\infty e^{-t^2} \cos(tx) dt$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est continûment dérivable. Donner une expression de $F'(x)$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F'(x) + \frac{x}{2} F(x) = 0$

   En déduire que la fonction $G(x) = e^{\frac{x^2}{4}} F(x)$ est constante.
4. Donner l'expression de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ en utilisant le résultat de l'exercice 2.3

Exercice 3

On pose $F(x) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

1. Montrer que F est définie et continue sur $[0, \infty[$
2. Montrer que F est continûment dérivable sur $]0, \infty[$.

Exercice 4 Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

On définit (le produit de convolution de f et g par) :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy.$$

1. Montrer que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si il existe K tel que $f(x) = g(x) = 0$ pour $|x| > K$ alors il existe L tel que $(f * g)(x) = 0$ pour $|x| > L$.
3. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^k$ avec des dérivées bornées alors $f * g$ est aussi de classe $\mathcal{C}^k$ et calculer sa dérivée k-ième.
4. Soit $\rho(x) = \exp(-\frac{1}{1-x^2})$ si $|x| < 1$ et $\rho(x) = 0$ sinon. Vérifier que ρ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $\int_{-\infty}^\infty \rho(x) dx = 1$.
5. On pose $\rho_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} \rho(\frac{x}{\epsilon})$. Montrer que $\rho_\epsilon * f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et converge uniformément vers f sur tout segment $[-K, K]$, pour $\epsilon \to 0$.
6. Montrer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\rho_\epsilon * g(x) - g(x)| dx \to_{\epsilon \to 0} 0.$$

Exercice 5 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

On définit sa transformée de Fourier : $\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}dx$.

1. Montrer que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $f(x) = 0$ pour $|x| > K$, alors : $|\hat{f}(t)| \leq \frac{1}{|t|} \int_{-\infty}^{\infty} |f'(t)|dt$.
3. Déduire de la question précédente et de l'exercice 5.6 que quel que soit f intégrable $\hat{f}(t)$ tend vers 0 pour $t \to \infty$.

Exercice 3 (correction partielle)

On pose $F(x) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} dt$. Montrons que F est continue en 0 (pour le reste cf TD).

Ecrivons $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ avec $F_1(x) = \int_0^1 e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} dt$ et $F_1(x) = \int_1^\infty e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} dt$. F_1 est clairement continue comme intégrale dépendant d'un paramètre d'une fonction continue donc uniformément continue sur tous les compacts $[0, 1] \times [0, A]$.

Pour F_2 on effectue une intégration par partie, ce pour quoi on a plusieurs choix (le but est d'augmenter la puissance de $1/x$ vers $1/x^2$ pour obtenir une fonction intégrable en $+\infty$)

méthode 1 : Par exemple, on pose $u(t) = e^{-tx}/t$, $u'(t) = -xe^{-tx}/t - e^{-tx}/t^2$, $v(t) = -\cos(t)$ $v'(x) = \sin(t)$ d'où

$$\int_1^A e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} dt = [-e^{-tx} \frac{\cos(t)}{t}]_1^A + \int_1^A (xt + 1)e^{-tx} \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$$

Donc

$$F_2(x) = e^{-x} \cos(1) + \int_1^\infty (xt + 1)e^{-tx} \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

Or $|f(t, x)| = |(xt + 1)e^{-tx} \frac{\cos(t)}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$ pour $x \geq 0, t \geq 0$ (car $(u + 1)e^{-u}$ est décroissante). Comme $t \to \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, \infty[$, le théorème de continuité avec condition de domination implique F_2 continue.

méthode 2 : $v'(t) = e^{-tx} \sin(t)$,$v(T, x) = \int_0^T e^{-tx} \sin(t)dt$, $u(t) = 1/t$, $u'(t) = -1/t^2$

$$\int_1^A e^{-tx} \frac{\sin(t)}{t} dt = [v(t, x)/t]_1^A + \int_1^A v(t, x)/t^2 dt$$

On peut étudier v comme une intégrale dépendant d'un paramètre en x, mais elle se calcule aussi expilicitement :

$$\begin{aligned}
v(T, x) &= Im \int_0^T e^{-tx+it} dt = [Im(\frac{e^{-tx+it}}{(i - x)})]_0^T \\
&= Im(\frac{e^{-Tx+iT}}{(i - x)} - \frac{1}{(i - x)}) \\
&= Im(\frac{e^{-Tx}(\cos(T) + i\sin(T))(-i - x)}{(1 + x^2)} - \frac{(-i - x)}{(1 + x^2)}) \\
&= \frac{e^{-Tx}(-\cos(T) - x\sin(T))}{(1 + x^2)} + \frac{1}{(1 + x^2)}
\end{aligned}$$

D'où $|v(T, x)| \leq 1 + \frac{(1+x)}{(1+x^2)} \leq \frac{(3/2+x^2/2)}{(1+x^2)} + 1 \leq 5/2$ En particulier comme $5/2t^2$ est intégrable, le théorème de continuité avec condition de domination donne la continuité de F_2 grâce à la formule obtenue en faisant $A \to \infty$:

$$F_2(x) = -v(1, x) + \int_1^\infty \frac{v(t, x)}{t^2} dt.$$