Université Claude Bernard
L3 MASS 61 Probabilités

Mathématiques
2014-2015

Contrôle continu
Mercredi 25 mars 2015

Durée : 1H30

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Questions de Cours (7 points) :

1. (1 point) Énoncer le théorème d'inversion de Fourier (avec la formule d'inversion)
2. (0,5 points) Énoncer le loi forte des Grands nombres
3. (1 point) Énoncer le lemme de Borel-Cantelli
4. (1,5 points) Énoncer le Théorème de Paul Lévy (version forte avec transformée de Fourier et Laplace)
5. (1 point) Énoncer le Théorème central limite dans $\mathbb{R}^d$ avec une caractérisation de la loi limite qui intervient.
6. (2 points) Énoncer et PROUVER la loi du 0-1 de Kolmogorov.

Toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace de probabilité (Ω, Σ, P).

Exercice 1 (5 points) Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle

$$P_X = a\mathbb{1}_{[0,\infty[}(x)e^{-ax}dx$$
$$P_Y = b\mathbb{1}_{[0,\infty[}(y)e^{-by}dy,$$

avec $a, b > 0$.

1. Trouver a et b tel que $\mathbf{E}(X) = 1$ et $\mathbf{E}(Y) = 2$.
2. Montrer que $\{\omega \in \Omega : X(\omega) > Y(\omega)\}$ est mesurable (pour la tribu Σ) et calculer $P(X > Y)$.
3. Calculer $\mathbf{E}[(X + Y)^2]$.
4. Calculer $\mathbf{E}(\min(X, Y))$.
5. Soit $f(x) = x^2e^{-x}$. Déterminer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^n} f\left(\frac{x_1 + ... + x_n}{n}\right)e^{-x_1}dx_1...e^{-x_n}dx_n.$$

Exercice 2 (5 points)

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.
On rappelle que $\mathbb{1}_A$ est la fonction indicatrice de A. On pose pour $n \geq 3$.

$$X_n = 2.\mathbb{1}_{\{U_n\leq 1/n\}} - \mathbb{1}_{\{(1-U_n)\leq 1/n\}},$$

1. Donner les lois P_{X_n} de X_n.

2. Calculer $\mathbf{E}(X_n^4)$.
   (X_n) converge-t-elle dans L^4 ?
3. Appliquer le lemme de Borel-Cantelli à

$$A_n = \{\omega : |X_n(\omega)| \geq 1\}.$$

4. Soit

$$Y = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |X_k|.$$

   Montrer que $P(Y \geq 1) = 1$.
   Que conclut-on sur la convergence presque sûre de X_n ?
5. La sous-suite $(X_{n^2})_{n\geq 1}$ converge-t-elle presque sûrement ?

Exercice 3 (3 points)

Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribués de loi

$$P_{Z_n}(dz) = \frac{1}{2}e^{-|z|}dz.$$

On pose

$$S_n = Z_1 + ... + Z_n.$$

1. Montrer que $P(\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty) \in \{0, 1\}$. (On pourra utiliser la loi du $0-1$)
2. Montrer que $P(\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty) = P(\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty)$.
3. Que vaut $P(\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty)$?