Université Claude Bernard Mathématiques
L3 MASS 61 Probabilités 2014-2015

Correction du Contrôle continu 1

Exercice 1 (5 points) Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle

$$P_X(dx) = a1_{[0,\infty[}(x)e^{-ax}dx$$
$$P_Y(dy) = b1_{[0,\infty[}(y)e^{-by}dy,$$

avec $a, b > 0$.

1. Trouvons a et b tel que $\mathbf{E}(X) = 1$ et $\mathbf{E}(Y) = 2$. Par transfert puis changement de variable, on a
$$\mathbf{E}(X) = \int_0^\infty axe^{-ax}dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty xe^{-x}dx = \frac{1}{a}[-xe^{-x} - e^{-x}]_0^\infty = \frac{1}{a}.$$
Danc $1/a = 1$ soit $a = 1$ et de même $1/b = 2$ soit $b = 1/2$.
2. $\{X > Y\} = (X - Y)^{-1}(]0, \infty[)$ est l'image inverse d'un ouvert (donc d'un borélien) par une fonction mesurable $(X - Y)$ donc est mesurable. Calculons $P(X > Y)$ par transfert
$$P(X > Y) = \int_0^\infty dxae^{-ax}\int_0^x dybe^{-by} = \int_0^\infty dxae^{-ax}(1 - e^{-bx}) = 1 - \frac{a}{a+b} = \frac{b}{a+b} = \frac{1}{3}$$
3. Calculons $\mathbf{E}[(X + Y)^2] = \mathbf{E}[X^2] + \mathbf{E}[Y^2] + 2\mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y]$. Par transfert (puis changement de variable puis intégration), on a :
$$\mathbf{E}[Y^2] = \int_0^\infty by^2e^{-by}dy = \frac{1}{b^2}\int_0^\infty y^2e^{-y}dy = \frac{1}{b^2}[(-y^2 - 2y - 2)e^{-y}]_0^\infty = \frac{2}{b^2}.$$
Donc, $\mathbf{E}[(X + Y)^2] = \frac{2}{b^2} + \frac{2}{a^2} + \frac{2}{ab} = 14$
4. Calculons la loi de $\min(X, Y)$. Comme par indépendance pour $t > 0$
$$P(\min(X, Y) > t) = P(X > t \text{ et } Y > t) = P(X > t)P(Y > t) = e^{-at}e^{-bt}$$
on déduit que $\min(X, Y)$ est une variable exponentielle de paramètre $a + b$ donc
$$\mathbf{E}(\min(X, Y)) = \frac{1}{a+b} = \frac{2}{3}.$$
5. Soit $f(x) = x^2e^{-x}$ que l'on remarque être bornée sur $[0, \infty[$ (car continue et tendant vers 0 à l'infini, ou bien par variation) Déterminons la limite de
$$\int_{\mathbb{R}_+^n} f(\frac{x_1 + ... + x_n}{n})e^{-x_1}dx_1...e^{-x_n}dx_n = \mathbf{E}[f(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}])$$
par transfert avecX_i i.i.dde même loi que X. vu $E(|X|) = 1 < \infty$ la Loi forte des grands nombres s'applique et $\frac{X_1+...+X_n}{n} \to E(X) = 1$ p.s donc comme f continue $f(\frac{X_1+...+X_n}{n}) \to f(1) = e^{-1}$ ps. Comme $f(\frac{X_1+...+X_n}{n})$ est dominée par $||f||_\infty$ on déduit par TCD :
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[f(\frac{X_1 + ... + X_n}{n}]) = E(e^{-1}) = e^{-1}.$$

Exercice 2 (5 points)

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On rappelle que 1_A est la fonction indicatrice de A. On pose pour $n \geq 3$.

$$X_n = 2.1_{\{U_n \leq 1/n\}} - 1_{\{(1-U_n)\leq 1/n\}} \in \{0,-1,2\},$$

1. $P(X_n = 2) = P(U_n \leq 1/n) = 1/n, P(X_n = -1) = P(U_n \geq 1 - 1/n) = 1/n$ donc $P(X_n = 0) = 1 - 1/2n$ et donc
$$P_{X_n} = \frac{1}{n}\delta_2 + \frac{1}{n}\delta_{-1} + (1 - \frac{2}{n})\delta_0$$
2. Par transfert $\mathbf{E}(X_n^4) = (2^4+1)/n \to 0$.
   (X_n) converge dans L^4 vers 0.
3. Appliquons le lemme de Borel-Cantelli à
$$A_n = \{\omega : |X_n(\omega)| \geq 1\}.$$
   On a $P(A_n) = 1 - P(X_n = 0) = 2/n$ donc par la série de Riemann :$\sum P(A_n) = \infty$. De plus $A_n \in \sigma(X_n)$ donc les A_n sont indépendants comme les X_n donc par Borel Cantelli $P(\limsup_n A_n) = 1$.
4. Par la question précédente, p.s. on a une infinité de $|X_n| \geq 1$ donc la limsup
$$Y = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |X_k|$$
   (la plus grande des valeurs d'adhérence) vaut au moins 1 p.s.
   X_n ne converge pas presque surement car elle ne tend pas vers 0 p.s. et comme c'est la limite dans L^4 c'est la seule limite ps. possible.
5. Comme $\sum P(A_{n^2}) < \infty$ Borel Cantelli implique $P(\liminf_n A_{n^2}^c) = 1$ donc comme $A_{n^2}^c = \{X_{n^2} = 0\}$ on obtient qu'avec proba 1, $(X_{n^2})_{n\geq 1}$ est stationnaire égale à 0 donc converge presque surement vers 0.

Exercice 3 (3 points)

Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribués de loi

$$P_{Z_n}(dz) = \frac{1}{2}e^{-|z|}dz.$$

On pose

$$S_n = Z_1 + ... + Z_n.$$

1. $\{S_n \to_{n\to\infty} +\infty\} = \{S_{n+k} - S_k \to_{n\to\infty} +\infty\}$ donc appartient à la tribu $\sigma(Z_{n+k}n \geq 1)$, comme c'est vrai pour tout k il appartient à la tribu assumptotique de Z_n. Comme les v.a sont indépendantes la loi du $0-1$ s'applique et donne $P(S_n \to_{n\to\infty} +\infty) \in \{0,1\}$.
2. Par parité de la loi de S_n, $P(S_n \to_{n\to\infty} +\infty) = P(-S_n \to_{n\to\infty} +\infty) = P(S_n \to_{n\to\infty} -\infty)$.
3. $$P(S_n \to_{n\to\infty} +\infty) = 1/2(P(S_n \to_{n\to\infty} +\infty) + P(S_n \to_{n\to\infty} -\infty)) \leq 1/2P(S_n \to_{n\to\infty} \pm\infty) \leq 1/2$$
   par la question précédente (et union disjointe) et donc vaut 0 par 1.