Université Claude Bernard
L3 MASS 61 Probabilités

Mathématiques
2015-2016

Contrôle continu
Mercredi 23 mars 2016

Durée : 1H30

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Questions de Cours (7 points) :

1. (0,5 point) Enoncer le théorème de transfert
2. (1 point) Enoncer le théorème d'inversion de Fourier (avec la formule d'inversion)
3. (2 points) Enoncer et PROUVER la loi forte des Grands nombres dans le cas des variables réelles avec $E(X^4) < \infty$.
4. (1 point) Enoncer la loi du 0-1 de Kolmogorov.
5. (1 point) Enoncer le lemme de Borel-Cantelli
6. (1,5 points) Enoncer le Théorème de Paul Lévy (version forte avec transformée de Fourier et Laplace).

Exercice 1 (4 points+ Bonus 2 points) Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramère p donnée par :

$$P(X = n) = P(Y = n) = (1 - p)p^n, n \geq 0.$$

1. Donner la mesure P_X loi de X.
2. Trouver $\mathbf{E}(X)$
3. Montrer que $\{X > Y\}$ est mesurable et calculer $P(X > Y)$.
4. Calculer $\mathbf{E}[e^{iXt}]$.
5. Calculer $\mathbf{E}(\min(X, Y))$.
6. **(Bonus 2 points)** Soit $Z = \min(X, Y)$, $T = |X - Y|$. Montrer que (Z, T) sont indépendants.

Exercice 2 (5 points)

Soit U une variables aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$. On rappelle que 1_A est la fonction indicatrice de A. On pose pour $n \geq 2$.

$$X_n = 1_{\{U \leq \frac{1}{n^2}\}} + 2.1_{\{U \geq (1 - \frac{1}{n^2})\}},$$

1. Donner les lois P_{X_n} de X_n.
2. Calculer $\mathbf{E}(X_n^2)$.
3. Appliquer le lemme de Borel-Cantelli à

$$A_n = \{\omega : |X_n(\omega)| \geq 1\}.$$

4. Soit
$$Y = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |X_k|.$$
Montrer que $P(Y > 0) = 0$.
Que conclut-on sur la convergence presque sure de X_n ?

Exercice 3 (4 points)

Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribués de loi exponentielle
$$P_{Z_n}(dz) = e^{-z} 1_{[0,\infty[}(z) dz.$$
On pose
$$S_n = Z_1 + ... + Z_n.$$

1. Montrer que $P(S_n \to_{n\to\infty} +\infty) \in \{0, 1\}$. (On pourra utiliser la loi du $0 - 1$)
2. Que vaut $P(\frac{S_n}{n} \to_{n\to\infty} 1)$? (Justifier)
3. Que vaut $P(S_n \to_{n\to\infty} +\infty)$?
4. Déterminer la limite
$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{n}{n + (x_1 + ... + x_n)} e^{-x_1} dx_1 ... e^{-x_n} dx_n.$$