Université Claude Bernard
L3 MASS 61 Probabilités

Mathématiques
2015-2016

Correction du Contrôle continu 1

Exercice 1 (5 points) Soient $X, Y : \Omega \to \mathbb{N}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramère p donnée par $P(X = n) = P(Y = n) = (1-p)p^n, n \geq 0$.

1. La mesure $P_X = \sum_{n=0}^{\infty}(1-p)p^n\delta_n$ loi de X.
2. Par transfert dans le cas discret, on a

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-p)p^n n = (1-p)p\sum_{n=1}^{\infty} np^{n-1} = (1-p)p\frac{d}{dp}\sum_{n=1}^{\infty} p^n = (1-p)p\frac{d}{dp}\frac{1}{1-p} = \frac{p}{1-p}$$

3. $\{X > Y\} = (X-Y)^{-1}(]0, \infty[)$ est l'image inverse d'un ouvert (donc d'un borélien) par une fonction mesurable $(X - Y)$ donc est mesurable. Calculons $P(X > Y)$ par transfert (où en décomposant cet évènement en union dénombrable)

$$P(X > Y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=k+1}^{\infty} P(X = l > Y = k)$$

Par indépendance on déduit : $P(X > Y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=k+1}^{\infty} P(X = l)P(Y = k) = (1-p)^2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=k+1}^{\infty} p^l p^k$ Donc en sommant les séries géométriques :

$$P(X > Y) = (1-p)^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p^{k+1}}{1-p}p^k = (1-p)p\frac{1}{1-p^2} = \frac{p}{1+p}.$$

4. Par transfert $\mathbf{E}[e^{iXt}] = \sum_{n=0}^{\infty}(1-p)p^n e^{int} = \frac{1-p}{1-pe^{int}}$.
5. Calculons la fonction de répartition de $\min(X, Y)$ en utilisant l'indépendence et $P(X \geq k) = \sum_{l=k}^{\infty}(1-p)p^l = p^k$:

$$P(\min(X, Y) \geq k) = P(X \geq k \; et \; Y \geq k) = P(X \geq k)P(Y \geq k) = p^{2k}$$

On retrouve la même valeur que pour X avec p remplacé par p^2 donc comme la fonction de répartition caractérise la loi, $\min(X, Y)$ est de loi géométrique et raison p^2 donc on déduit du 2 par transfert puis indépendance $\mathbf{E}(\min(X, Y)) = \frac{p^2}{1-p^2}$.

6. Soit $Z = \min(X, Y) \in \mathbb{N}$, $T = |X - Y| \in \mathbb{N}$. Montrer que (Z, T) sont indépendants. On calcule si $t \neq 0$

$$P(Z = z, T = t) = P(X = z, Y = t + z) + P(Y = z, X = t + z) = 2(1-p)^2 p^{t+2z}$$

$$P(Z = z, T = 0) = P(X = Y = z) = (1-p)^2 p^{2z}$$

En sommant sur $zP(T = 0) = \sum_{z=0}^{\infty}(1-p)^2 p^{2z} = \frac{1-p}{1+p}$ donc on a :

$$P(T = 0)P(Z = z) = \frac{1-p}{1+p}p^{2z}(1-p^2) = (1-p)^2 p^{2z} = P(Z = z, T = 0)$$

De même $P(T=t)=\sum_{z=0}^{\infty} 2(1-p)^2 p^{t+2z} = 2\frac{1-p}{1+p}p^t$ et

$$P(T=t)P(Z=z) = 2\frac{1-p}{1+p}p^{2z}(1-p^2)p^t = 2(1-p)^2p^{2z}p^t = P(Z=z, T=t)$$

On déduit donc que Z, T sont indépendantes.

Exercice 2 (5 points)

Soit U une variables aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. On rappelle que 1_A est la fonction indicatrice de A. On pose pour $n \geq 2$. $X_n = 1_{\{U \leq \frac{1}{n^2}\}} + 2.1_{\{U \geq (1-\frac{1}{n^2})\}}$,

1. $$P(X_n = 1) = P(U \leq \frac{1}{n^2}) = \frac{1}{n^2}, \qquad P(X_n = 2) = P(U \geq (1-\frac{1}{n^2})) = \frac{1}{n^2}$$
   et $X_n : \Omega \to \{0,1,2\}$ donc la loi est $P_{X_n} = \frac{1}{n^2}\delta_1 + \frac{1}{n^2}\delta_2 + (1-\frac{2}{n^2})\delta_0$
2. Calculer $\mathbf{E}(X_n^2) = \frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} = \frac{5}{n^2}$.
3. Appliquons le lemme de Borel-Cantelli à $A_n = \{\omega : |X_n(\omega)| \geq 1\}$.
   $P(A_n) = \frac{2}{n^2}$ Donc par une série de Riemann $\sum P(A_n) < \infty$ donc par Borel-Cantelli $P(\limsup A_n) = 0$ donc $P(\liminf A_n^c) = 1$.
4. Soit $Y = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} |X_k|$.
   Or $A_n^c = \{|X_n(\omega)| = 0\}$ donc
   $$\liminf A_n^c = \{\exists k \forall n \geq k |X_n(\omega)| = 0\} = \{\exists k \sup_{n\geq k} |X_n(\omega)| = 0\} \subset \{Y = 0\}$$
   car la suite $\sup_{k\geq n} |X_k|$ est décroissante donc si elle vaut zero, elle tend vers 0.
   Donc par complémentaire $P(Y > 0) = 0$ et donc X_n converge donc p.s. vers 0.

Exercice 3 (4 points)

Soit $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribués de loi exponentielle $P_{Z_n}(dz) = e^{-z}1_{[0,\infty[}(z)dz$. On pose $S_n = Z_1 + ... + Z_n$.

1. Montrons que $P(S_n \to_{n\to\infty} +\infty) \in \{0,1\}$. (On pourra utiliser la loi du $0-1$)$\{S_n \to_{n\to\infty} +\infty\} = \{Z_k + ... + Z_n \to_{n\to\infty} +\infty\} \in \sigma(Z_l, l \geq k)$ donc en prenant l'intersection sur k, $\{S_n \to_{n\to\infty} +\infty\}$ est dans la tribu assymptotique de la suite de variables aléatoires indépendantes identiquement Z_n, donc on peut appliquer la loi du 0-1 et $P(S_n \to_{n\to\infty} +\infty) \in \{0,1\}$.
2. $E(Z_1) = E(|Z_1|) = 1$ donc la loi des grands nombres s'applique et $P(\frac{S_n}{n} \to_{n\to\infty} E(Z_1) = 1) = 1$
3. $P(S_n \to_{n\to\infty} +\infty) = 1$, car $\frac{S_n}{n} \to_{n\to\infty} E(Z_1) = 1$ implique $S_n \simeq n \to \infty$.
4. Déterminons la limite
   $$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{n}{n + (x_1 + ... + x_n)} e^{-x_1}dx_1 ... e^{-x_n}dx_n = \lim_{n\to\infty} E(\frac{1}{1+\frac{S_n}{n}}).$$
   Or la fonction $1/(1+x)$ est continue donc l'application de la LGN donne $\frac{1}{1+\frac{S_n}{n})} \to 1/2$ p.s. et la suite est dominée car $1/(1+x)$ est borné par 1, donc par le théorème de convergence dominée de Lebesgue,
   $$E(\frac{1}{1+\frac{S_n}{n}}) \to \frac{1}{2}.$$