Université Claude Bernard
L3 MASS 61 Probabilités

Mathématiques
2014-2015

Contrôle continu
Mardi 5 mai 2015

Durée : 1H30

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Questions de Cours (6 points) :

1. (1 point) Donner la formule de la transformée de Fourier d'un vecteur gaussien $\mathcal{N}(m, \Gamma)$.
2. (1 point) Énoncer le critère d'absolue continuité d'un vecteur gaussien $\mathcal{N}(m, \Gamma)$ avec la formule pour la densité.
3. (1 point) Donner une formule pour $\mathbf{E}(XY|\mathcal{F})$ lorsque X est $\mathcal{F}$-mesurable positive et Y positive. (Formule appelée en cours propriété de modularité)
4. (1 point) Donner le théorème pour calculer l'espérance conditionnelle entre variables d'un vecteur gaussien.
5. (2 points) Énoncer et prouver le Théorème central limite.

Exercice 1 (3 points)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes avec X_n de loi normale $\mathcal{N}(0, n)$. On pose

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. Calculer la variance de T_n.
2. Déterminer la limite en loi de la suite (T_n).

Exercice 2 (4 points) Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de loi

$$P_{(X,Y)} = \frac{1}{4}\delta_{\{(0,-1)\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{(0,1)\}} + \frac{1}{2}\delta_{\{(1,1)\}}.$$

1. Calculer les lois marginales P_X, P_Y.
2. Soit Z de même loi que X ; T de même loi que Y avec Z, T indépendants. Calculer $\mathbf{E}(Z|T)$.
3. Calculer $\mathbf{E}(X|Y)$.

Exercice 3 (7 points + Bonus 1 point)

Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(m, \Gamma)$ avec $m = (1, 1, 1)$ et

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $Y = (Y_1, Y_2, Y_3) = (X_1, X_2 - X_1, X_3 - X_2)$.

1. Calculer, si elle existe, la densité de la loi de la variable aléatoire X_1.
2. Calculer la matrice de covariance du vecteur Y.
3. Les variables $Y_1 = X_1$ et $Y_2 = X_2 - X_1$ sont elles indépendantes ?
4. Calculer, si elle existe, la densité de la loi du vecteur aléatoire Y.
5. Calculer, si elle existe, la densité de la loi du vecteur aléatoire (X_1, X_2).
6. Soit
$$Z = Y_2^2 + Y_3^2.$$
Calculer pour $t > 0$
$$\mathbf{E}(exp(-tZ)).$$
En déduire la loi de Z.
7. Soient $a > 0$ et (N_1, N_2, N_3) des variables indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que
$$P\left[\max(|N_1|, |N_2|, |N_3|) \leq a\right] \leq a^3.$$
8. **Bonus (1 point)** Soient $a > 0$ et
$$T = \max(|X_1 - 1|, |X_2 - X_1|, |X_3 - X_2|).$$
Montrer que :
$$P(T \leq a) \leq a^3.$$