Université Claude Bernard — Mathématiques
L3 MASS 61 Probabilités — 2014-2015

Correction du Contrôle continu 2

Exercice 1 (3 points)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes avec X_n de loi normale $\mathcal{N}(0,n)$ et $T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k$.

1. Par indépendance (pour l'additivité) puis calcul, la variance est
$$Var(T_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n Var(X_k) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2n^2}.$$

2. $(X_1, ..., X_n)$ est un vecteur gaussien (par indépendance) donc la combinaison linéaire T_n est une variable gaussienne, $\mathcal{N}(0, \frac{(n+1)}{2n})$. Par le cours, sa fonction caractéristique
$$\Phi_{T_n}(t) = e^{-\frac{t^2(n+1)}{4n}} \to_{n\to\infty} e^{-\frac{t^2}{4}}.$$
C'est la transformée de Fourier d'une loi $\mathcal{N}(0,\frac{1}{2})$ donc par le théorème de Paul Lévy, c'est la limite en loi de T_n.

Exercice 2 (4 points)

Soit (X,Y) un v.a. de loi $P_{(X,Y)} = \frac{1}{4}\delta_{\{(0,-1)\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{(0,1)\}} + \frac{1}{2}\delta_{\{(1,1)\}}$.

1. $P_X = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$, $P_Y = \frac{1}{4}\delta_{-1} + \frac{3}{4}\delta_1$.
2. Soit Z de même loi que X ; T de même loi que Y avec Z, T indépendants. Par indépendance
$$\mathbf{E}(Z|T) = \mathbf{E}(Z) = \frac{1}{2}.0 + 1.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
3. Par la formule du cours
$$\mathbf{E}(X|Y) = \frac{\mathbf{E}(X1_{\{Y=-1\}})}{P(Y=-1)}1_{\{Y=-1\}} + \frac{\mathbf{E}(X1_{\{Y=1\}})}{P(Y=1)}1_{\{Y=1\}}.$$
Or, $X = 1_{\{X=1\}}$, $\mathbf{E}(X1_{\{Y=-1\}}) = P((X,Y) = (1,-1)\}) = 0$,
$\mathbf{E}(X1_{\{Y=1\}}) = P((X,Y) = (1,1)\}) = \frac{1}{2}$ Donc
$$\mathbf{E}(X|Y) = \frac{1/2}{3/4}1_{\{Y=1\}} = \frac{2}{3}1_{\{Y=1\}}.$$

Exercice 3 (7 points + Bonus 1 point)

Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(m,\Gamma)$ Soit $Y = (Y_1, Y_2, Y_3) = A(X_1, X_2, X_3)$, avec $m = (1,1,1)$ et $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. En extrayant la moyenne et la covariance $X_1 \sim \mathcal{N}(1,1)$ donc de densité $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(-\frac{(x-1)^2}{2})$.
2. $Cov(Y) = A\Gamma A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ (matrice identité).

3. Y est un vecteur gaussien comme image par une application linéaire du vecteur gaussien X, donc $Y_1 = X_1$ et $Y_2 = X_2 - X_1$ sont indépendantes car $Cov(Y_1, Y_2) = 0$.
4. Comme expliqué Y est un vecteur gaussien $\mathcal{N}((1,0,0), I_3)$ donc de densité (comme celle de 3 variables gaussienne indépendantes)

$$f_Y(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} exp(-\frac{(y_1 - 1)^2 + y_2^2 + y_3^2}{2}).$$

5. $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}((1,1), C) C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Or $det(C) = 2 - 1 = 1 \neq 0, C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ donc (X_1, X_2) admet pour densité

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} exp(-\frac{2(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 2(x_1 - 1)(x_2 - 1)}{2})$$

6. Soit $Z = Y_2^2 + Y_3^2$. Par transfert et indépendance

$$\mathbf{E}(exp(-tZ)) = \frac{1}{2\pi(2t+1)}(2t+1) \int dxdyexp(-\frac{(2t+1)(x^2+y^2)}{2}) = \frac{1}{(2t+1)}$$

en utilisant la densité de la loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{(2t+1)})$ Or $\frac{1}{2}\int_0^\infty exp(-tz - z/2)dz = \frac{1}{(2t+1)}$ donc par égalité des transformées de Laplace Z est de loi exponentielle de paramètre $1/2$ (moyenne 2).
7. Soient $a > 0$ et (N_1, N_2, N_3) des variables indépendantes identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Par indépendance

$$P\left[\max(|N_1|, |N_2|, |N_3|) \leq a\right] = P(|N_1| \leq a)P(|N_2| \leq a)P(|N_3| \leq a).$$

Or $P(|N_i| \leq a) = \int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp(-t^2/2)dt$ et $exp(-t^2/2) \leq 1, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \leq \frac{1}{2}$ donc

$$P(|N_i| \leq a) \leq \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} dt = a.$$

8. **Bonus (1 point)** On a vu que (Y_1, Y_2, Y_3) sont indépendantes $\mathcal{N}(1,1), \mathcal{N}(0,1)$ et $\mathcal{N}(0,1)$ donc $(N_1, N_2, N_3) = (Y_1 - 1, Y_2, Y_3)$ sont indépendantes et$\mathcal{N}(0,1)$ donc $P(T \leq a) \leq a^3$ par la question précédente.