Université Claude Bernard — Mathématiques
L3 MASS 61 Probabilités — 2015-2016

**Contrôle continu**
**Mercredi 4 mai 2016**

**Durée : 1H30**

**Les documents et les calculatrices sont interdits.**
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

**Questions de Cours (6 points) :**

1. (1 point) Donner la formule de la transformée de Fourier (fonction caractéristique) d'un vecteur gaussien $\mathcal{N}(m, \Gamma)$ de moyenne $m$ et matrice de covariance $\Gamma$.
2. (1 point) Énoncer le critère d'indépendance pour les variables d'un vecteur gaussien.
3. (1 point) Énoncer le théorème définissant l'espérance conditionnelle dans $L^1(\Omega)$.
4. (1 point) Donner la formule pour $\mathbf{E}(h(X)|Y)$ quand le couple $(X, Y)$ a une densité $p$.
5. (2 points) Énoncer et prouver le Théorème central limite.

**Exercice 1 (4 points)**

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes avec $X_n$ de loi

$$P_{X_n}(dx) = \frac{1}{2}e^{-|x|}dx.$$

On pose

$$T_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. Calculer la fonction caractéristique de $T_n$.
2. Déterminer la limite en loi de la suite $(T_n)_{n\geq 1}$.

**Exercice 2 (4 points)** Soit $(X, Y)$ un vecteur aléatoire de loi

$$P_{(X,Y)} = \frac{1}{3}\delta_{\{(-1,1)\}} + \frac{1}{3}\delta_{\{(-1,-1)\}} + \frac{1}{3}\delta_{\{(1,0)\}}.$$

1. Calculer les lois marginales $P_X, P_Y$.
2. Soit $Z$ de même loi que $X$ ; $T$ de même loi que $Y$ avec $Z, T$ indépendants. Calculer l'espérance conditionnelle du produit $ZT$ sachant $\sigma(T)$ : $\mathbf{E}(ZT|T)$.
3. Calculer l'espérance conditionnelle du produit $XY$ sachant $\sigma(Y)$ : $\mathbf{E}(XY|Y)$.

**Exercice 3 (6 points + Bonus 2 points)**

Soit $(X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(m, \Gamma)$ avec $m = (0, 1, 2)$ et

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit aussi

$$Y = (Y_1, Y_2, Y_3) = (X_1, X_2 - \frac{X_1 + X_3}{2}, X_3 - \frac{X_1}{3}).$$

1. Calculer, si elle existe, la densité de la loi de la variable aléatoire $X_2$.
2. Montrer que la matrice de covariance du vecteur $Y$ est :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

3. Les variables $Y_1 = X_1$ et $Y_2 = X_2 - \frac{X_1+X_3}{2}$ sont elles indépendantes ?
4. Calculer, si elle existe, la densité de la loi du vecteur aléatoire $Y$.
5. Calculer, si elle existe, la densité de la loi du vecteur aléatoire $(X_1, X_2)$.
6. Soit

$$Z = \frac{Y_1^2}{3} + \frac{Y_2^2}{2}.$$

   Calculer pour $t > 0$

$$\mathbf{E}(exp(-tZ)).$$

   En déduire la loi de $Z$.

7. Calculer :

$$\mathbf{E}\left(\frac{\sqrt{2}|Y_1|}{\sqrt{2}|Y_1| + \sqrt{3}|Y_2|}\right).$$

8. **(Bonus : 2 points)** Calculer la loi de :

$$T = \frac{Y_1}{Y_2}.$$