Université Claude Bernard | Mathématiques
L3 MASS 61 Probabilités | 2015-2016

Correction du Contrôle continu 2

Exercice 1 (4 points)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes avec X_n de loi $P_{X_n}(dx) = \frac{1}{2}e^{-|x|}dx$. On pose $T_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n X_k$.

1. Par indépendance, la fonction caractéristique est
$$\Phi_{T_n}(t) = \prod_{k=1}^n \Phi_{\frac{X_k}{\sqrt{n}}}(t) = \prod_{k=1}^n \Phi_{X_k}(\frac{t}{\sqrt{n}}).$$
Il reste à calculer la fonction caractéristique de X_n, par transfert :
$$\Phi_{X_n}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\frac{1}{2}e^{-|x|}dx = \frac{1}{2}[\frac{e^{ixt+x}}{it+1}]_{-\infty}^{0} + [\frac{e^{ixt-x}}{it-1}]_0^{\infty} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{it+1} - \frac{1}{it-1}\right) = \frac{1}{t^2+1}$$
et donc : $\Phi_{T_n}(t) = \left(\frac{n}{t^2+n}\right)^n$.
2. Il a deux solutions, soit on utilise le 1 pour voir $\Phi_{T_n}(t) = \exp(-n\ln(1+\frac{t^2}{n})) \to_{n\to\infty} \exp(-t^2)$ et on obtient par le théorème de Paul Lévy que T_n converge en loi vers une loi normale $\mathcal{N}(0,2)$. Ou bien on remarque que le TCL s'applique (car $E(X_k) = 0$ à calculer en détail dans cette méthode par imparité) et il suffit d'obtenir la variance de X_k et de trouver $E(X_k^2) = 2$ ce qui donne la même conclusion.

Exercice 2 (4 points) Soit (X,Y) de loi $P_{(X,Y)} = \frac{1}{3}\delta_{\{(-1,1)\}} + \frac{1}{3}\delta_{\{(-1,-1)\}} + \frac{1}{3}\delta_{\{(1,0)\}}$.

1. Les lois marginales P_X, P_Y sont
$$P_X = \frac{2}{3}\delta_{\{-1\}} + \frac{1}{3}\delta_{\{1\}}, \quad P_Y = \frac{1}{3}\delta_{\{1\}} + \frac{1}{3}\delta_{\{-1\}} + \frac{1}{3}\delta_{\{0\}}.$$
2. Soit Z de même loi que X ; T de même loi que Y avec Z, T indépendants. Calculons l'espérance conditionnelle du produit ZT sachant $\sigma(T)$ par modularité $\mathbf{E}(ZT|T) = T\mathbf{E}(Z|T)$. Par indépendance $\mathbf{E}(Z|T) = \mathbf{E}(Z) = \frac{2}{3}.(-1) + 1.\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$. Donc $\mathbf{E}(ZT|T) = -\frac{T}{3}$.
3. Calculons l'espérance conditionnelle du produit XY sachant $\sigma(Y)$:par modularité $\mathbf{E}(XY|Y) = Y\mathbf{E}(X|Y)$. Par la formule du cours dans le cas discret :
$$\mathbf{E}(X|Y) = \frac{\mathbf{E}(X1_{\{Y=-1\}})}{P(Y=-1)}1_{\{Y=-1\}} + \frac{\mathbf{E}(X1_{\{Y=0\}})}{P(Y=0)}1_{\{Y=0\}} + \frac{\mathbf{E}(X1_{\{Y=1\}})}{P(Y=1)}1_{\{Y=1\}}.$$
Or $X1_{\{Y=-1\}} = -1_{\{Y=-1\}}$, $X1_{\{Y=1\}} = -1_{\{Y=1\}}$ et $X1_{\{Y=0\}} = 1_{\{Y=0\}}$ donc $\mathbf{E}(X|Y) = -1_{\{Y=-1\}} - 1_{\{Y=1\}} + 1_{\{Y=0\}} = 21_{\{Y=0\}} - 1$. Finalement, $\mathbf{E}(XY|Y) = 2Y1_{\{Y=0\}} - Y = -Y$.

Exercice 3 (6 points + Bonus 2 points)

Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(m, \Gamma)$ avec $m = (0,1,2)$ et $\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.
Soit aussi $Y = (Y_1, Y_2, Y_3) = (X_1, X_2 - \frac{X_1+X_3}{2}, X_3 - \frac{X_1}{3})$.Donc $Y = A(X_1, X_2, X_3)$, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. En extrayant la moyenne et la covariance $X_2 \sim \mathcal{N}(1,4)$ donc de densité $f_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} exp(-\frac{(x-1)^2}{8})$.
2. Pour montrer que la matrice de covariance du vecteur Y est : $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$.

   Il suffit de calculer à partir de la formule du cours (le calcul intermédiaire est nécessaire) :

$$Cov(Y) = A\Gamma A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 4/3 \\ 1 & 0 & 8/3 \end{pmatrix} = C.$$

3. Les variables $Y_1 = X_1$ et $Y_2 = X_2 - \frac{X_1+X_3}{2}$ sont indépendantes car $Cov(Y_1, Y_2) = C_{1,2} = 0$
4. Comme expliqué Y est un vecteur gaussien $\mathcal{N}((0,0,2), C)$ donc de densité (comme celle de 3 variables gaussienne indépendantes vu $det(C) = 4^2$, Rmq $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$.)

$$f_Y(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{4(\sqrt{2\pi})^3} exp(-\frac{y_1^2}{6} - \frac{y_2^2}{4} - \frac{3(y_3-2)^2}{16}).$$

5. $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}((0,1), D)$ avec $D = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ Or $det(D) = 12-4 = 8 \neq 0, C^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ donc (X_1, X_2) admet pour densité $f(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi\sqrt{2}} exp(-\frac{4x_1^2+3(x_2-1)^2-4x_1(x_2-1)}{16})$
6. Soit $Z = \frac{Y_1^2}{3} + \frac{Y_2^2}{2}$. Par transfert et indépendance

$$\mathbf{E}(exp(-tZ)) = \frac{1}{2\pi(2t+1)}(2t+1)\int dxdyexp(-\frac{(2t+1)(x^2+y^2)}{2}) = \frac{1}{(2t+1)}$$

   en utilisant la densité de la loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{(2t+1)})$ Or $\frac{1}{2}\int_0^\infty exp(-tz - z/2)dz = \frac{1}{(2t+1)}$ donc par égalité des transformées de Laplace Z est de loi exponentielle de paramètre $1/2$ (moyenne 2).
7. Calculons (comme $Y_1/\sqrt{3}, Y_2/\sqrt{2}$ i.i.d) :

$$\mathbf{E}\left(\frac{\sqrt{2}|Y_1|}{\sqrt{2}|Y_1| + \sqrt{3}|Y_2|}\right) = \mathbf{E}\left(\frac{\sqrt{3}|Y_2|}{\sqrt{2}|Y_1| + \sqrt{3}|Y_2|}\right) = \frac{1}{2}.$$

   La dernière égalité vient du fait que la somme des 2 valeurs (obtenues égales par symétrie entre v.a ; i.i.d) vaut 1 donc chacune vaut 1/2.
8. **(Bonus : 2 points)** Calculons la loi de : $T = \frac{Y_1}{Y_2}$. Comme en TD on va voir que c'est une loi de Cauchy. On prend h mesurable positive, on applique le transfert, puis on fait le changement de variable $\frac{y_1}{y_2} = z$ sur l'intégrale en y_1

$$E(h(T)) = \int_{\mathbb{R}} dy_1 \int_{\mathbb{R}} dy_2 \frac{1}{2\pi\sqrt{6}} exp(-\frac{y_1^2}{6} - \frac{y_2^2}{4}) h(\frac{y_1}{y_2}) = \int_0^\infty dy_2 \int_{-\infty}^\infty dz \frac{1}{\pi\sqrt{6}} y_2 exp(-\frac{z^2y_2^2}{6} - \frac{y_2^2}{4}) h(z)$$

   Donc en intégrant en y_2, $E(h(T)) = \int_0^\infty dz \frac{1}{\pi\sqrt{6}} \frac{6}{2z^2+3} h(z)$ d'où la loi $P_T(dz) = dz\frac{1}{\pi}\frac{a}{z^2+a^2}$ avec $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$. (loi de cauchy de paramètre a).