Université Claude Bernard
L3 MASS 61 Probabilités

Mathématiques
2014-2015

Contrôle continu final
Mercredi 3 juin 2015

Durée : 2H

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de JUSTIFIER les réponses aux exercices.

Questions de Cours (6 points) :

1. (1 point) Énoncer le théorème de Paul Lévy sur la convergence en loi.
2. (0,5 point) Donner la formule de la transformée de Fourier d'un vecteur gaussien $\mathcal{N}(m, \Gamma)$.
3. (0,5 point) Donner une définition du mouvement brownien géométrique avec le nom des paramètres dans le modèle de Black et Scholes.
4. (1 point) Donner la formule de la valeur d'une option de type call d'échéance T dans le modèle de Black et Scholes (en explicitant les notations éventuelles).
5. (1 point) Énoncer le théorème de convergence des martingales dans $L^p, p > 1$.
6. (2 points) Énoncer et prouver le 2ème Théorème d'arrêt (celui pour les martingales uniformément intégrables).

Exercice 1 (4 points)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes avec X_n de loi normale $\mathcal{N}(0, \sqrt{n})$, c'est-à-dire de moyenne 0 et de variance $\sqrt{n}$. Soit

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k^2}{\sqrt{k}}.$$

1. Quelle est la loi de $\frac{X_n}{\sqrt{n}}$? Donner sa densité.
2. Montrer que $\frac{X_n}{\sqrt{n}}$ converge dans L^2 vers 0.
3. Montrer que $\frac{Y_n}{n}$ converge p.s. vers 1.
4. Quelle est la limite en loi de $\frac{Y_n - n}{\sqrt{n}}$?
5. On considère $\epsilon > 0$. Montrer que
$$P(|X_n| \geq \epsilon\sqrt{n}) \leq \frac{15}{\epsilon^6 n\sqrt{n}}.$$
6. En déduire que $\frac{X_n}{\sqrt{n}}$ converge p.s. vers 0.

Exercice 2 (4 points)

Soit (X_1, X_2) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, \Gamma)$ avec

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer, si elle existe, la densité de la loi de la variable aléatoire (X_1, X_2).
2. X_1 et X_2 sont ils indépendants ?
3. Montrer que $\mathbf{E}(X_1|X_2) = \frac{X_2}{4}$.
4. Que vaut $\mathbf{E}((X_1 - \frac{X_2}{4})^2)$?
5. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(X_1^2|X_2)$.
6. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(X_1|X_2 - X_1)$.

Exercice 3 (6 points+Bonus : 2 points) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes de loi exponentielle

$$P_{X_i}(dx) = e^{-x}1_{[0,\infty[}(x)dx.$$

On considère la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$. Les martingales et temps d'arrêt sont par rapport à cette filtration.

On définit

$$Z_n = \max(0, X_n - 1),$$
$$S_n = 1 + Z_1 + ... + Z_n,$$
$$Y_n = \left(\max_{k\in[1,n]} X_k\right) - \frac{n}{e}.$$

On peut interpréter Y_n comme le gain de la vente d'une maison au jour n si on paye e^{-1} euros à l'agent immobilier par jour pour faire visiter la maison une fois par jour et que X_k est la proposition de l'acheteur du k-ème jour.

1. Montrer que Z_n est de loi $P_{Z_n}(dx) = (1 - \frac{1}{e})\delta_0 + e^{-x-1}1_{[0,\infty[}(x)dx$.
2. Montrer que $V_n = S_n - \frac{n}{e}$ est une martingale.
3. Soit τ un temps d'arrêt avec $E(\tau) < \infty$. En utilisant le théorème d'arrêt optionnel de Doob, montrer que $E(V_\tau) = 1$. En déduire que $E(Y_\tau) \leq 1$ (en vérifiant $Y_n \leq V_n$)
4. Soit
$$T = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, X_n > 1\}.$$
Montrer que T est un temps d'arrêt.
5. (**Bonus : 1 point**) Montrer que T est une temps optimal de vente (parmi les temps d'arrêt intégrable) en calculant $E(Y_T)$.
6. Calculer $\mathbf{E}(e^{-S_n})$.
7. Montrer que $W_n = \left(1 - \frac{1}{2e}\right)^{-n} e^{-S_n}$ est une martingale.
8. W_n a-t-elle une limite p.s. ?
9. (**Bonus : 1 point**) Montrer que W_n ne converge pas dans L^1.
Indication : on pourra utiliser $\frac{1}{e} + \ln(1 - \frac{1}{2e}) > 0$ et la loi des grands nombres pour trouver la limite de
$$(S_n + n\ln(1 - \frac{1}{2e}))$$