Université Claude Bernard
L3 MASS 61 Probabilités

Mathématiques
2014-2015

Correction du Contrôle continu
Mercredi 3 juin 2015

Exercice 1 (4 points)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes avec X_n de loi normale $\mathcal{N}(0, \sqrt{n})$, c'est-à-dire de moyenne 0 et de variance $\sqrt{n}$. Soit

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k^2}{\sqrt{k}}.$$

1. $\frac{X_n}{\sqrt{n}}$ est normale de moyenne 0 et de variance $\mathbf{E}(\frac{X_n^2}{n}) = \frac{E(X_n^2)}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Sa densité est $\sqrt{\frac{\sqrt{n}}{2\pi}} exp(-\frac{x^2\sqrt{n}}{2})$.
2. Par le point précédent $||\frac{X_n}{\sqrt{n}}||_2^2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ donc $\frac{X_n}{\sqrt{n}}$ converge dans L^2 vers 0.
3. $\frac{X_k^2}{\sqrt{k}}$ sont indépendants comme X_k et i.i.d de loi le carré d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$, qui est intégrable avec $E(\frac{X_k^2}{\sqrt{k}}) = 1$. D'après la loi des grands nombres $\frac{Y_n}{n}$ converge donc p.s. vers 1.
4. Comme $\frac{X_k^2}{\sqrt{k}}$ i.i.d et dans L^2 avec $Var(\frac{X_k^2}{\sqrt{k}}) = E((\frac{X_k^2}{\sqrt{k}})^2 - 1) = \frac{E(X_k^4)}{k} - 1 = \frac{3k}{k} - 1 = 2$.
   On déduit du TCL que $\frac{Y_n - n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une loi $\mathcal{N}(0, 2)$
5. On considère $\epsilon > 0$. Par l'inégalité de Markov
   $$P(|X_n| \geq \epsilon\sqrt{n}) = P(|X_n|^6 \geq \epsilon^6 n^3) \leq \frac{E(X_n^6)}{\epsilon^6 n^3} = \frac{15}{\epsilon^6 n\sqrt{n}}.$$
6. Comme $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq \epsilon\sqrt{n}) < \infty$ pour tout $\epsilon > 0$ (par une série de Riemann), on déduit du lemme de Borel-Cantelli que $\frac{X_n}{\sqrt{n}}$ converge p.s. vers 0.

Exercice 2 (4 points)

Soit (X_1, X_2) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, \Gamma)$ avec

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. $det(\Gamma) = 4 - 1 = 3 \neq 0, \Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ donc (X_1, X_2) a une densité $\frac{1}{2\pi\sqrt{3}} exp(-\frac{4x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2}{6})$.
2. $Cov(X_1, X_2) = 1 \neq 0$ donc X_1, X_2 ne sont pas indépendants.
3. On sait que $E(X_1|X_2) = \lambda X_2$ car (X_1, X_2) est un vecteur gaussien centré et par le théorème du cours. Il suffit donc d'utiliser la relation $1 = E(X_1X_2) = \lambda E(X_2^2) = 4\lambda$.
4. Que vaut $E((X_1 - \frac{X_2}{4})^2) = E(X_1^2) + \frac{E(X_2^2)}{16} - \frac{E(X_1X_2)}{2} = 1 + \frac{4}{16} - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. ?
5. Pour appliquer le théorème du cours on calcule $E(Y^2)$ avec $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{3}{4})$. Donc $E(Y^2) = x^2 + Var(Y) = x^2 + \frac{3}{4} = f(x)$. Par le théorème du cours $E(X_1^2|X_2) = f(E(X_1|X_2)) = \frac{X_2^2 + 12}{16}$.

6. $(X_1, X_2 - X_1)$ est un vecteur gaussien centré comme image par l'application linéaire $(x,y) \mapsto (x, y-x)$ de (X_1, X_2). Comme $E((X_2-X_1)X_1) = 1-1 = 0$ donc X_1, X_2-X_1 sont indépendants donc $E(X_1|X_2 - X_1) = E(X_1) = 0$.

Exercice 3 (6 points+Bonus : 2 points) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables indépendantes de loi exponentielle

$$P_{X_i}(dx) = e^{-x}1_{[0,\infty[}(x)dx.$$

On considère la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$.

On définit

$$Z_n = \max(0, X_n - 1).$$

Soit

$$S_n = 1 + Z_1 + ... + Z_n,$$

$$Y_n = \left(\max_{k\in[1,n]} X_k\right) - \frac{n}{e}.$$

On peut interpréter Y_n comme le gain de la vente d'une maison à l'instant n si on paye e^{-1} euros à l'agent immobilier par jour pour faire visiter la maison une fois par jour et que X_k est la proposition de l'acheteur du k-ème jour.

1. On définit la mesure $\mu(dx) = (1 - \frac{1}{e})\delta_0 + e^{-x-1}1_{[0,\infty[}(x)dx$. Calculons la fonction de répartition de Z_n. $P(Z_n < 0) = 0 = \mu(]-\infty, 0])$, $P(Z_n = 0) = P(X_n \leq 1) = \int_0^1 e^{-x}dx = 1 - e^{-1} = \mu(\{0\})$ et pour $x > 0$, $P(Z_n \leq x) = P(X_n \leq 1 + x) = \int_0^{1+x} e^{-y}dy = 1 - e^{-x-1}$
   Or $\mu(]-\infty, x]) = (1 - \frac{1}{e}) + \int_0^x e^{-t-1}dt = (1 - \frac{1}{e}) + \frac{1}{e} - e^{-x-1} = P(Z_n \leq x)$.
   Par identification, on déduit donc la loi $P_{Z_n}(dx) = (1 - \frac{1}{e})\delta_0 + e^{-x-1}1_{[0,\infty[}(x)dx$.
2. Soit $V_n = S_n - \frac{n}{e}$, on déduit par modularité et indépendance de Z_{n+1} par rapport à $\mathcal{F}_n$ que

   $$E(V_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(V_n + Z_{n+1} - \frac{1}{e}|\mathcal{F}_n) = V_n + E(Z_{n+1}) - \frac{1}{e}$$

   Or par transfert $E(Z_{n+1}) = \int_0^\infty xe^{-x-1}dx = [-xe^{-x-1} - e^{-x-1}]_0^\infty = e^{-1}$ donc $E(V_{n+1}|\mathcal{F}_n) = V_n$ qui est bien une martingale.
3. Soit τ un temps d'arrêt avec $E(\tau) < \infty$. Pour utiliser le théorème d'arrêt optionnel de Doob, on vérifie l'hypothèse sur les incréments et par indépendance $E(|V_{n+1}-V_n||\mathcal{F}_n) = E(|V_{n+1}-V_n|) \leq E(Z_{n+1}) + \frac{1}{e} = \frac{2}{e}$ qui ne dépend pas de n, Or comme $E(\tau) < \infty$, $P(\tau < \infty) = 1$ donc comme V_n est une surmartingale $E(V_\tau) = E(V_\tau 1_{\tau<\infty}) \leq E(V_0) = 1$.
   COmme $-V_n$ est aussi une surmartingale, on a même aussi $E(V_\tau) \leq -E(V_0) = -1$ on a donc égalité.
   Or par l'inégalité entre norme $||.||_\infty$ et norme $||.||_1$:

   $$Y_n = 1 + \left(\max_{k\in[1,n]}(X_k - 1)\right) - \frac{n}{e} \leq 1 + \left(\sum_{k\in[1,n]} \max(0, X_k - 1)\right) - \frac{n}{e} = V_n$$

   Donc $E(Y_\tau) \leq E(V_\tau) = 1$.
4. Soit

   $$T = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, X_n > 1\}.$$

   Montrer que $\{T \leq n\} = \{X_1 \leq 1, ...X_{n-1} \leq 1, X_n > 1\} \in \mathcal{F}_n$ donc T est un temps d'arrêt.

5. (**Bonus : 1 point**) Montrons que T est une temps optimal de vente (parmi les temps d'arrêt intégrable).

$$E(T) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(T=k) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X_1 \leq 1, ...X_{n-1} \leq 1, X_n > 1) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(Z_1 = 01, ...Z_{n-1} = 0, Z_n > 0)$$

Or par indépendance et identification de la loi de Z_n :

$$P(T < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-\frac{1}{e})^{n-1}\frac{1}{e} < \infty$$

(comme l'espérance d'une loi géométrique).

On calcule

$$E(Y_T) = \sum_{k=1}^{\infty} E(1_{T=k}Y_k) = \sum_{n=1}^{\infty} E(1_{\{X_1\leq 1, ...X_{n-1}\leq 1, X_n > 1\}}Y_n).$$

Or sous l'évènement $\{X_1 \leq 1, ...X_{n-1} \leq 1, X_n > 1\}$, $Y_n = X_n - \frac{n}{e}$ donc par indépendence

$$E(Y_T) = \sum_{n=1}^{\infty} E(1_{\{X_1\leq 1, ...X_{n-1}\leq 1, X_n > 1\}}(X_n - \frac{n}{e})) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{e})^{n-1}E(1_{\{X_n>1\}}(X_n - 1 + 1 - \frac{n}{e}))$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{e})^{n-1}(E(Z_n) + \frac{1}{e}(1-\frac{n}{e})) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{e})^{n-1}\frac{1}{e}(2-\frac{n}{e}) = 2 - \frac{1}{e^2}\frac{1}{(1-(1-\frac{1}{e}))^2} = 1.$$

6. Par indépendance et identité des distributions $\mathbf{E}(e^{-S_n}) = e^{-1}\prod_{i=1}^{n}\mathbf{E}(e^{-Z_i}) = e^{-1}[\mathbf{E}(e^{-Z_1})]^n$.
   Par transfert $\mathbf{E}(e^{-Z_1}) = (1-\frac{1}{e}) + e^{-1}\int_0^{\infty} e^{-2x}dx = (1-\frac{1}{e}) + e^{-1}[\frac{e^{-2x}}{-2}]_0^{\infty} = (1-\frac{1}{2e})$
7. Par modularité puis indépendance on a

$$\mathbf{E}(W_{n+1}|\mathcal{F}_n) = E(\left(1-\frac{1}{2e}\right)^{-n-1}e^{-S_n - Z_{n+1}}|\mathcal{F}_n) = \left(1-\frac{1}{2e}\right)^{-n-1}e^{-S_n}E(e^{-Zn+1}|\mathcal{F}_n)$$

$$\mathbf{E}(W_{n+1}|\mathcal{F}_n) == \left(1-\frac{1}{2e}\right)^{-n-1}e^{-S_n}E(e^{-Zn+1})$$

   Donc $\mathbf{E}(W_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \left(1-\frac{1}{2e}\right)^{-n}e^{-S_n} = W_n$ donc il s'agit d'une martingale.
8. Comme W_n est une surmartingale positive, elle a une limite p.s.
9. (**Bonus : 1 point**) $E(W_n) = 1$ ne tend pas vers 0 donc si on voit que W_n tend p.s. vers 0, on conclut qu'elle ne converge pas dans L^1. (sinon sa limite serait 0 et W_n ne tend pas vers 0 dans L^1 d'après $E(|W_n|) = 1$).
   Or $\frac{1}{n}(S_n + n\ln(1-\frac{1}{2e}))$ est une somme de v.a. i.id. dans L^1 d'espérance, $E(Z_n) + \ln(1-\frac{1}{2e}) = \frac{1}{e} + \ln(1-\frac{1}{2e}) > 0$ (car $1-\ln(2) > \ln(1-x)+2x > 0$ sur $x \in]0, 1/2[$ car la fonction est croissante sur cet intervalle et vaut 0 en 0) donc $(S_n + n\ln(1-\frac{1}{2e}) \to +\infty$ p.s. donc en appliquant e^{-x}, $W_n \to 0$ p.s. ce qui conclut.