Université Claude Bernard — Mathématiques
L3 MASS 61 Probabilités — 2015-2016

Contrôle continu final
Mercredi 1er juin 2016

Durée : 2H

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de JUSTIFIER les réponses aux exercices.

Questions de Cours (6 points) :

1. (0,5 point) Donner la formule de la loi de n variables aléatoires indépendantes.
2. (1 point) Donner une formule pour l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(XY|\mathcal{F})$ lorsque X est $\mathcal{F}$-mesurable positive et Y positive. (Formule appelée en cours propriété de modularité)
3. (1 point) Donner une définition d'un processus gaussien et du mouvement brownien (standard).
4. (1 point) Donner la formule de la valeur d'une option de type call d'échéance T dans le modèle de Black et Scholes (en explicitant les notations éventuelles).
5. (1 point) Énoncer le théorème de convergence presque sûr des martingales.
6. (1,5 points) Énoncer et PROUVER le 1er Théorème d'arrêt de Doob (celui pour les temps bornés).

Exercice 1 (3 points)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes avec X_n de loi normale $\mathcal{N}(0, n^2)$, c'est-à-dire de moyenne 0 et de variance n^2. Soit

$$Y_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. Quelle est la loi de $\frac{X_n}{n\sqrt{n}}$? Donner sa densité.
2. Montrer que $\frac{X_n}{n\sqrt{n}}$ converge dans L^2 vers 0.
3. Quelle est la limite en loi de Y_n ?
4. On considère $\epsilon > 0$. Montrer que

$$P(|X_n| \geq \epsilon n\sqrt{n}) \leq \frac{3}{\epsilon^4 n^2}.$$

5. En déduire que $\frac{X_n}{n\sqrt{n}}$ converge p.s. vers 0.

Exercice 2 (4 points)

Soit (X_1, X_2) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, \Gamma)$ avec matrice de covariance :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer, si elle existe, la densité de la loi de la variable aléatoire (X_1, X_2).
2. X_1 et X_2 sont ils indépendants ?
3. Montrer que $\mathbf{E}(X_2|X_1) = \frac{X_1}{2}$.
4. Que vaut $\mathbf{E}((X_2 - \frac{X_1}{2})^2)$?
5. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(X_2^2|X_1)$.
6. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(e^{X_2}|X_1)$.

Exercice 3 (4 points+Bonus : 2 points)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes de même loi caractérisée par

$$P(X_i = 1/2) = \frac{1}{2} = P(X_i = 2).$$

On considère la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$. Les martingales et temps d'arrêt sont par rapport à cette filtration.

On définit

$$P_n = X_1 ... X_n,$$
$$S_n = \ln(P_n) = \ln(X_1) + ... + \ln(X_n),$$
$$V_n = S_n^2 - n(\ln(2))^2,$$

1. Donner la loi P_{X_n} de X_n (comme mesure de probabilité) et calculer $\mathbf{E}(X_n)$.
2. P_n est elle une sur-martingale ? une sous-martingale ?
3. Montrer que S_n et V_n sont des martingales.
4. Soit
$$T = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, P_n \geq 4 \ ou \ P_n \leq \frac{1}{4}\}.$$
Montrer que T est un temps d'arrêt.
5. (**Bonus : 2 points**) Montrer que $\mathbf{E}(T) \leq 4$.
Indication : Utiliser le premier thèorème d'arrêt.

Exercice 4 (3 points)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes avec X_n de loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n(n+1)})$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$. On pose

$$Z_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} X_i X_j.$$

1. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
2. Calculer $\mathbf{E}(Z_n^2)$ (sous la forme d'une somme double de nombres du type de celle définissant Z_n) et montrer en remarquant que $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ que $\mathbf{E}(Z_n^2) \leq 1$.
3. Est-ce que Z_n converge p.s. ? Est-ce que Z_n converge dans L^2 ?