Université Claude Bernard | Mathématiques
L3 MASS 61 Probabilités | 2015-2016

Contrôle continu
Mercredidi 1 juin 2016

Durée : 2H

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de JUSTIFIER les réponses aux exercices.

Exercice 1 (3 points)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes avec X_n de loi normale $\mathcal{N}(0,n^2)$, c'est-à-dire de moyenne 0 et de variance n^2. Soit

$$Y_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. $\frac{X_n}{n\sqrt{n}}$ est normale de moyenne 0 et de variance $\mathbf{E}(\frac{X_n^2}{n^3}) = \frac{E(X_n^2)}{n^3} = \frac{1}{n}$. Sa densité est $\sqrt{\frac{n}{2\pi}}exp(-\frac{x^2 n}{2})$.
2. Par le point précédent $||\frac{X_n}{n\sqrt{n}}||_2^2 = \frac{1}{n} \to 0$ donc $\frac{X_n}{n\sqrt{n}}$ converge dans L^2 vers 0.
3. Comme $(X_1, ..., X_n)$ est un vecteur gaussien (car v.a. gaussienne indépendantes), par combinaison linéaire, Y_n est une variable gaussienne de moyenne 0 et de variance (grâce à l'indépendance)
$$Var(Y_n) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} Var(X_k) = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \to_{n\to\infty} \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$
Donc la tranformée de Fourier $\Phi_{Y_n}(t) \to exp(-t^2/6)$ et, par le théorème de paul Lévy, la limite en loi de Y_n est une variable $\mathcal{N}(0,1/3)$.
4. On considère $\epsilon > 0$. Par l'inégalité de Markov
$$P(|X_n| \geq \epsilon n\sqrt{n}) = P(|X_n|^4 \geq \epsilon^4 n^6) \leq \frac{E(X_n^4)}{\epsilon^4 n^6} = \frac{3}{\epsilon^4 n^2}.$$
5. Comme $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq \epsilon n\sqrt{n}) < \infty$ pour tout $\epsilon > 0$ (par une série de Riemann), on déduit du lemme de Borel-Cantelli (version du chapitre 2 du cours) que $\frac{X_n}{n\sqrt{n}}$ converge p.s. vers 0.

Exercice 2 (4 points)

Soit (X_1, X_2) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0,\Gamma)$ avec

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.
2. $det(\Gamma) = 6 - 1 = 5 \neq 0$ donc (X_1, X_2) a une densité. $\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$ donc par le cours, on a la densité $\frac{1}{2\pi\sqrt{5}}exp(-\frac{3x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2}{10})$.

3. X_1 et X_2 ne sont pas indépendants car $Cov(X_1, X_2) = 1 \neq 0$
4. On sait que $E(X_2|X_1) = \lambda X_1$ car (X_1, X_2) est un vecteur gaussien centré et par le théorème du cours. Il suffit donc d'utiliser la relation venant de la propriété charactéristique de la projection orthogonale $1 = E(X_1X_2) = \lambda E(X_1^2) = 2\lambda$. On obtient $\mathbf{E}(X_2|X_1) = \frac{X_1}{2}$.
5. $\mathbf{E}((X_2 - \frac{X_1}{2})^2) = E(X_2^2) + \frac{E(X_1^2)}{4} - 2\frac{E(X_1X_2)}{2} = 3 + \frac{2}{4} - 1 = \frac{5}{2}$?
   Pour appliquer le théorème du cours on calcule $E(Y^2)$ avec $Y \sim \mathcal{N}(x, \frac{5}{2})$. Donc $E(Y^2) = x^2 + Var(Y) = x^2 + \frac{5}{2} = f(x)$. Par le théorème du cours $E(X_2^2|X_1) = f(E(X_2|X_1)) = \frac{X_1^2+10}{4}$.
6. Avec le Y précédent, on calcule à partir de la transofrmée de Fourier évalué en $-i$ (donc on a vu en cours qu'elle coincide avec la transformée de Laplace dans le cas Gaussien) $E(e^Y) = e^x E(e^{Y-x}) = e^x \Phi_{Y-x}(-i) = e^x e^{\frac{5}{4}} = g(x)$.
   Par le théorème du cours $\mathbf{E}(e^{X_2}|X_1) = g(E(X_2|X_1)) = e^{\frac{X_1}{2}+\frac{5}{4}}$.

Exercice 3 (4 points+Bonus : 2 points)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables indépendantes de même loi caractérisée par

$$P(X_i = 1/2) = \frac{1}{2} = P(X_i = 2).$$

On considère la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$. Les martingales et temps d'arrêt sont par rapport à cette filtration.

On définit

$$P_n = X_1...X_n,$$
$$S_n = \ln(X_1) + ... + \ln(X_n),$$
$$V_n = S_n^2 - n(\ln(2))^2,$$

1. La loi est $P_{X_n} = \frac{1}{2}\delta_{1/2} + \frac{1}{2}\delta_2$ et $E(X_n) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 2) = \frac{5}{4}$.
2. $P_{n+1} = P_nX_{n+1}$ donc par modularité et indépendance de X_{n+1} par rapport à $\mathcal{F}_n$, on a $\mathbf{E}(P_{n+1}|\mathcal{F}_n) = P_n\mathbf{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = P_n\mathbf{E}(X_{n+1}) \geq P_n$ puisque P_n positive comme produit de variables positives. C'est donc une sous-martingale.
3. Montrons que S_n et V_n sont des martingales (elles sont dans L^∞ car S_n somme de variables de Bernoulli). Par modularité et indépendance on a

   $$\mathbf{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = S_n + \mathbf{E}(\ln(X_{n+1})) = S_n + \frac{1}{2}(\ln(\frac{1}{2}) + \ln(2)) = S_n$$

   et comme $V_{n+1} = V_n - (\ln(2))^2 + \ln(X_{n+1})^2 + 2S_n \ln(X_{n+1})$

   $$\mathbf{E}(V_{n+1}|\mathcal{F}_n) = V_n - (\ln(2))^2 + \mathbf{E}(\ln(X_{n+1})^2) + 2S_n\mathbf{E}(\ln(X_{n+1})) = V_n - (\ln(2))^2 + \frac{1}{2}(\ln(\frac{1}{2})^2 + \ln(2)^2) = V_n$$

4. Soit

   $$T = \inf\{n \in \mathbb{N}^*, P_n \geq 4 \ ou \ P_n \leq \frac{1}{4}\}.$$

   Montrer T est un temps d'arrêt car de la forme $\inf\{n \in \mathbb{N}^*, P_n \in A\}$ avec (P_n) adapté et $A =]-\infty, 1/4] \cup [4, +\infty[$ mesurable et on a vu cet exemple général en cours.

5. (**Bonus : 2 points**) Montrons que $E(T) \leq 4$. Utilisons le premier thèorème d'arrêt appliquons le à la martingale V_n et au temps d'arrêt borné $T \wedge n$.
On a donc $E(V_{T\wedge n}) = E(V_0) = 0$ donc par linéarité
$$E(S_{T\wedge n}^2) = E(T \wedge n)\ln(2)^2$$
Or $S_{n+1} \in \{S_n + \ln(2), S_n - \ln(2)\}$ donc par récurrence, S_n est un multiple de $\ln(2)$ donc avant T, $S_n = \ln(P_n) \in [-2\ln(2), 2\ln(2)]$ donc $S_{T\wedge n}^2 \leq 4\ln(2)^2$ d'où
$$E(T \wedge n)\ln(2)^2 \leq 4\ln(2)^2$$
par convergence monotone on peut prendre la limite $n \to \infty$ pour obtenir $E(T \wedge n) \to E(T1_{T<\infty}) \leq 4$.
Il suffit de voir $P(T < \infty) = 1$ pour conclure. Or S_n est une somme de variables centrées dans L^2 iid donc par le TCL, $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers une variable $\mathcal{N}(0, \ln(2)^2 = Var(S_1))$ et pour tout $k \geq 4$,
$$P(T < \infty) \geq P(\limsup S_n = +\infty) \geq P(\exists n \geq k, S_n \geq \sqrt{n}) \geq P(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq 1) \to \int_1^\infty dte^{-t^2/2\ln(2)^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ln(2}$$
Mais $\{\limsup S_n = +\infty)\} = \{\limsup(S_n - S_k) = +\infty)\}$ est un évènement assymptotique associé à la suite de variables indépendantes $\ln(X_n)$ donc par la loi du 0-1, $P(\limsup S_n = +\infty) = 1$ (puisque 0 vient d'être exclu). DOnc $P(T < \infty) = 1$ et $T1_{T<\infty} = T$ p.s. d'où la conclusion.

Exercice 4 (3 points)

Soit $(X_n)_{n\geq1}$ une suite de v.a. indépendantes avec X_n de loi normale $\mathcal{N}(0, \frac{1}{n(n+1)})$ et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. On pose
$$Z_n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n X_iX_j = Z_{n-1} + X_n\sum_{i=1}^{n-1} X_i.$$

1. Par modularité vu Z_n, $\mathcal{F}_n$ d'après sa formule, $E(Z_n|\mathcal{F}_{n-1}) = Z_{n-1} + E(X_n|\mathcal{F}_{n-1})\sum_{i=1}^{n-1} X_i$. Or par indépendance, $E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) = E(X_n) = 0$ vu X_n est de loi normale centrée. Donc $E(Z_n|\mathcal{F}_{n-1}) = Z_{n-1}$ et $(Z_n)_{n\geq1}$ est une martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)$.
2. Calculons
$$\mathbf{E}(Z_n^2) = \mathbf{E}(\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n X_iX_j \sum_{k=1}^n \sum_{l=k+1}^n X_kX_l\right))$$
On peut décomposer la somme sur k en 4 selon k<i,k=i,i<k<j, k>j.
Dans tous les cas sauf le cas $k = i$ l'expression est linéaire en X_k ou X_l (dans le denier cas) donc par indépendence, un $E(X_k) = 0$ apparait et donc
$$\mathbf{E}(Z_n^2) = \mathbf{E}(\left(\sum_{i=k=1}^n \sum_{j=i+1}^n \sum_{l=i+1}^n X_i^2X_jX_l\right))$$
de même si $j \neq l$ $\mathbf{E}(X_i^2X_jX_l) = \mathbf{E}(X_i^2)\mathbf{E}(X_j)\mathbf{E}(X_l) = 0$ par indépendence donc reste seulement le terme $l = j$
$$\mathbf{E}(Z_n^2) = \mathbf{E}(\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n X_i^2X_j^2\right)) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i(i+1)}\frac{1}{j(j+1)}$$

Mais $\sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = 1 - \frac{1}{j} \leq 1$ par somme télescopique donc

$$\mathbf{E}(Z_n^2) \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} \leq 1.$$

3. Comme $\sup_n \mathbf{E}(Z_n^2) \leq 1$, Z_n est une martingale bornée dans L^2 et $2 > 1$ donc d'après le théorème de convergence des martingales elle converge p.s. et dans L^2.