Feuille de TD 1

Théorème de transfert, Lois et Indépendance.

Toutes les variables aléatoires (v.a.) sont définies sur le même espace de probabilité (Ω, Σ, P).

Exercice 1

Soit $X : \Omega \longrightarrow \{-2, 1\}$ une v. a. de Bernoulli de loi $P_X = (1/3)\delta_{-2} + (2/3)\delta_1$.
1.-Calculer l'intégrale $\int |X| dP$.
2.-Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ l'intégrale $\int X^n dP$ existe et calculer sa valeur.
3.-On fixe un nombre entier $n \geq 1$ puis on note $Y = X^n + 1$. Montrer que Y est une variable aléatoire de Bernoulli et explicitez sa loi et calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dP_Y(x)$.

Exercice 2

Soit $U : \Omega \longrightarrow [0, 1]$ une variable aléatoire de loi P_U définit par $P_U(B) = Leb(B \cap [0, 1])$, où Leb est la mesure de Lebesgue ; on dit que U a pour loi la loi uniforme de l'intervalle $[0, 1]$.
1.-On fixe $a > 0$. Calculer la valeur de intégrale $\int U^a dP$.
2.-On fixe $a > 0$ puis on note $V = U^a$. Explicitez la loi de la v. a. $V : \Omega \longrightarrow [0, 1]$.
3.- Calculer l'intégrale $\int_0^1 x^2 dP_V(x)$.
4.- Soit $U' : \Omega \longrightarrow [0, 1]$ une seconde v.a. indépendante de U et de même loi.
(i) On pose $B = \{\omega \in \Omega; U'(\omega) > U(\omega)\}$. Montrer que l'ensemble B appartient à la tribu Σ. Calculer sa probabilité $P(B)$.
(ii) On pose $V = U' - U$. Explicitez la loi de la variable aléatoire V. Calculer $P_V([0, +\infty[)$.

Exercice 3

Soit $U : \Omega \longrightarrow [0, 1]$ de loi uniforme. Donnez la loi de la v.a. $X = -2.1_{[0,1/3]}(U) + 1_{]1/3,1]}(U)$.

Exercice 4

Soient $X, Y : \Omega \longrightarrow \{-2, 1\}$ deux variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de lois $P_X = P_Y = (1/3)\delta_{-2} + (2/3)\delta_1$.
1.- Calculer la valeur de l'intégrale $\int (X + Y)^2 dP$.
2.- Explicitez la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$ et calculer l'intégrale $\int x^2 dP_Z(x)$.

Exercice 5

Soit $U : \Omega \longrightarrow [0, 1]$ une variable aléatoire de loi uniforme. On pose

$X = -1_{[0,1/4[}(U) + 1_{[1/4,1/2[}(U)$, $X' = -1_{[1/2,3/4[}(U) + 1_{[3/4,1]}(U)$ et $A = \{\omega \in \Omega; X(\omega) = X'(\omega)\}$.

1. Montrer que $P(A) = 0$, puis que $P_X = P_{X'}$.
2. Etablir que $\int XX' dP = \int X dP \times \int X' dP$.
3. Montrer que les variables aléatoires X et X' ne sont pas indépendantes.

Exercice 6 Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: $\forall n \in \mathbb{N}$

$$P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

1. Donner la loi P_X de X
2. Calculer $\mathbf{E}(X)$ puis la fonction caractéristique $\Phi_X(t)$
3. On pose $Y = (-1)^X$. Donner la loi de Y.

4. Soit Z une autre v.a. de Poisson de paramètre $\mu > 0$. Calculer $E[e^{it(X+Z)}]$. En déduire la loi de $X + Z$.

Exercice 7 Calculs de Fonctions caractéristiques.

Soient X_1, X_2, X_3, X_4 v.a. indépendantes de loi normale $N(0,1)$.

1. Trouver la fonction caractéristique de Y de loi $P_Y(dy) = \frac{1}{2}e^{-|y|}dy$.
2. En déduire la fonction caractéristique d'une variable Z de loi de Cauchy i.e. $P_Z(dz) = \frac{1}{\pi(1+z^2)}dz$.
3. Trouver la fonction caractéristique de X_1X_2.
4. Déterminer la fonction caractéristique et la loi de la variable $X_1X_2 + X_3X_4$.
5. Trouver la fonction caractéristique de X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
6. Quelle est la loi de la variable aléatoire $|X_1X_2 + X_3X_4|$? Trouver sa fonction caractéristique.

Exercice 8

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On veut montrer l'équivalence :

$$P(\sup_{n\geqslant 1} X_n < \infty) = 1 \iff \exists A > 0 \text{ tel que } \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > A) < \infty$$

1. Soit $A > 0$ fixé. On pose $A_n = \{X_n > A\}$ et on suppose $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > A) < \infty$. Que déduit-on du lemme de Borel-Cantelli ?
2. On suppose maintenant $\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > A) = \infty$. Montrer que
$$P(\sup_{n\geqslant 1} X_n \geqslant A) = 1.$$
3. Conclure.

Exercice 9 Suites de variables de Bernoulli

Soit (X_n) une suite de v.a.indépendantes avec pour $p_n \in [0,1]$: $P_{X_n} = p_n\delta_1 + (1-p_n)\delta_0$.

1. Montrer que (X_n) converge vers 0 en probabilité si et seulement si $\lim p_n = 0$.
2. Montrer que (X_n) converge vers 0 presque sûrement si et seulement si $\sum p_n < +\infty$.

Exercice 10

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. positives non nulles.

1. Montrer que $\mathbf{P}(\sum_{i=1}^{\infty} X_i = +\infty) = 1$
2. On suppose à partir de maintenant que les X_i suivent des lois exponentielles $X_i(P) = e^{-x}1_{[0,\infty)}(x)dx$. Montrer que $\forall a > 1$, $P\left(\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\log n} \leqslant a\right) = 1$.
3. Montrer que $P\left(\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\log n} \geqslant 1\right) = 1$.
4. En déduire que $P\left(\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\log n} = 1\right) = 1$.

Exercice 11 Loi des grands nombres Déterminer, sans calcul, les limites suivantes :

1. $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n})dx_1\ldots dx_n$ pour f une fonction continue sur $[0,1]$.
2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k} f(\frac{k}{n})$ pour f une fonction continue sur $[0,1]$ et $p \in [0,1]$.
3. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda n}\frac{(\lambda n)^k}{k!} f(\frac{k}{n})$ pour f une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $\lambda > 0$.