Feuille de TD 2

Types de Convergences, Transformées de Fourier et Laplace.

Toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace de probabilité (Ω, Σ, P).

Exercice 1 Soient U_n, V_n, $n \geq 1$ deux suites de variables aléatoires telles que :(i) $P\{V_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0\} = 1$.
(ii) la suite U_n, $n \geq 1$, converge en loi, lorsque $n \to +\infty$ vers une probabilité μ sur $\mathbb{R}$;
Etablir que $U_n + V_n \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \mu$ en loi.

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n \geqslant 1}, (Y_n)_{n \geqslant 1}$ des suites de v.a. de loi :

$$X_n = n1_{\{U \leqslant 1/n\}}, \qquad Y_n = n1_{\{U \leqslant 1/n^2\}},$$

où U suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Donner les lois de X_n et Y_n.
2. Montrer que X_n converge en loi, en probabilité mais pas dans L^2 vers 0. Converge t-elle p.s. vers 0 ?
3. Montrer que Y_n converge p.s. vers 0 mais pas dans L^2 vers 0.

Exercice 3 On fixe une suite $a(N) > 0$, $N \geq 1$ de nombres vérifiant $\lim_{N \to +\infty} a(N) = +\infty$ puis on considère une suite $X_N : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ de v.a. de Poisson de moyennes $E(X_N) = a(N)$, $N \geq 1$. On pose $Y_N = \frac{X_N - a(N)}{\sqrt{a(N)}}$ $N \geq 1$.
1.- Calculer $E(Y_N)$ et $E((Y_N)^2)$, $N \geq 1$.
2.- Calculer la fonction caractéristique $\phi_N(u) = E(exp(iuY_N))$, $u \in \mathbb{R}$, $N \geq 1$. puis la limite $\lim_{N \to +\infty} \phi_N(u)$. pour $u \in \mathbb{R}$ fixé.
4.- On fixe $x \in \mathbb{R}$. Etablir, avec la question 3, la relation limite

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n \leq a(N) + x\sqrt{a(N)}} \frac{a(N)^n e^{-a(N)}}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du.$$

5.- On note $K(x, y, N) = \sum_{n \leq xN} \frac{(yN)^n e^{-yN}}{n!}$ $N \geq 1$, $x, y > 0$.
Etablir que : $\lim_{N \to +\infty} K(x, y, N) = \frac{1}{2} 1_{\{0\}}(x - y) + 1_{]0,\infty[}(x - y)$.

6.- Soit μ une mesure borélienne positive et bornée sur $\mathbb{R}^+$. On considère sa transformée de Laplace $g(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tu} d\mu(u)$, $t \geq 0$.
(i) Montrer que la fonction $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
(ii) On fixe $x > 0$. Etablir l'identité

$$\sum_{n \leq xN} \frac{(-1)^n N^n g^{(n)}(N)}{n!} = \int_0^{+\infty} K(x, u, N) d\mu(u).$$

(iii) En déduire la formule d'inversion

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n \leq xN} \frac{(-1)^n N^n g^{(n)}(N)}{n!} = \mu([0, x[) + (1/2)\mu\{x\}.$$

7.- Soient μ_1 et μ_2 deux mesures borléiennes, positives et bornées. On désigne par g_1 et g_2 les transformées de Laplace associées. Montrer que $\mu_1 = \mu_2 \Longleftrightarrow g_1 \equiv g_2$.

Exercice 3
Soit $X_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, une suite de v.a.i.id. de loi normale $\mathfrak{N}(0, 1)$. On notera $U_n = \sum_{i=1}^n X_n^2$
On considère, par ailleurs, une suite de v.a.i.id. $V_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $n = 1, \ldots, N$ de loi exponentielle de moyenne $E(V_1) = 2$ et on note $S_n = V_1 + \cdots + V_n$, $n \geq 1$.
1.- Calculer les transformées de Laplace $E(exp(-aV_1))$ et $E(exp(-aU_2))$, $a \geq 0$.
2.-En déduire l'expression de la densité de la loi de la variable aléatoire U_2.
3.- Soit $k \geq 1$. Calculer les transformées de Laplace $E(exp(-aS_k))$ et $E(exp(-aU_{2k}))$, $a \geq 0$.
4.- Montrer que $U_{2k} \overset{(loi)}{=} S_k$.