Feuille de TD 3 : Vecteurs Gaussiens.

Exercice 1. Soit X et ε deux v.a.i., $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $\varepsilon(P) = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$ et $a > 0$.
On pose $Y = X\mathbf{1}_{\{|X|\leq a\}} - X\mathbf{1}_{\{|X|>a\}}$ et $Z = \varepsilon X$.
1. Montrer que $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.
2. Montrer qu'aucun des vecteurs $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} Z \\ X \end{pmatrix}$ n'est gaussien.
Indication : Considérer dans chaque cas la probabilité que la somme des coordonnées soit nulle.

Exercice 2. Soit X et Y deux v.a.i. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1. Soit $Z = max(X,Y)$. Calculer $\mathbb{E}Z$.
2. Soit $T = \dfrac{Y}{X}$.
   (a) Montrer que T suit la loi de Cauchy.
   (b) Montrer que $T \overset{loi}{=} \dfrac{1}{T}$. En déduire que $\mathbb{E}(\dfrac{|T|}{1+|T|}) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3. Soit X_1, X_2 et X_3 trois v.a.i. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $V = \begin{pmatrix} X_1 + X_2 + X_3 \\ X_1 - X_2 \\ X_2 - X_3 \\ X_3 - X_1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la loi du vecteur V.
2. En déduire que les v.a. $X_1 + X_2 + X_3$ et $(X_1 - X_2)^2 + (X_2 - X_3)^2 + (X_3 - X_1)^2$ sont indépendantes.

Exercice 4. Soit X_1, X_2 et X_3 trois v.a.i. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 - 2X_2 \\ X_1 + X_2 + X_3 \\ X_2 - X_3 \end{pmatrix}$.
1. Calculer la loi du vecteur Y.
2. Calculer la loi de $T = Y_2^2/3 + Y_3^2/2$.

Exercice 5. Soit $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$ un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(m,\Gamma)$, où $m = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$.
Calculer la loi du vecteur $Y = \begin{pmatrix} X_1 - X_2 + X_3 \\ 2X_2 - X_3 \\ X_1 + X_2 - 2X_3 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. Soit $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite de v.a.i.i.d. On pose $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $\overline{S} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{X})^2$.

1. On suppose dans cette question que la loi des v.a. X_k est $\mathcal{N}(0,1)$.
   On considère alors une matrice orthogonale $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ telle que $a_{n,j} = 1/\sqrt{n}$ pour $1 \leq j \leq n$ et on pose, pour $1 \leq k \leq n$, $Y_k = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}X_j$
   (a) Montrer que $(Y_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite de v.a.i. de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
   (b) En déduire que $\overline{X}$ et $\overline{S}$ sont indépendantes. Préciser les lois de $\overline{X}$ et de $n\overline{S}$
2. On suppose dans cette question que les v.a. X_k sont de moyenne 0, de variance 1 et de fonction caractéristique φ. On suppose aussi que $\overline{X}$ et $\overline{S}$ sont indépendantes. On note $S = n\overline{X}$ et $T = n\overline{S}$.
   (a) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{E}(Te^{itS}) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}e^{itS})$.
   (b) Montrer que l'égalité ci-dessus s'écrit
   $-(n-1)\varphi''(t)(\varphi(t))^{n-1} + (n-1)(\varphi'(t))^2)(\varphi(t))^{n-2} = (n-1)(\varphi(t))^n$.
   (c) Soit I le plus grand intervalle contenant l'origine sur lequel φ ne s'annule pas et ψ la fonction définie sur I par $\psi(t) = \dfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$.
   Montrer que la relation de (b) s'écrit $\psi'(t) = -1$. En déduire que la loi des v.a. X_k est $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 7. Soit X une v.a. de fonction caractéristique φ et, pour tout $n \geq 1$, X_n une v.a. de loi $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ et de fonction caractéristique φ_n définie par $\varphi_n(t) = e^{im_n t}e^{-\sigma_n^2 t^2/2}$. On suppose que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X.

1. Montrer que la suite $(\sigma_n^2)_{n\geq 1}$ converge vers un réel positif σ^2.
2. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la suite $(e^{im_n t})_{n\geq 1}$ converge puis que la suite $(m_n)_{n\geq 1}$ elle-même converge vers un réel m. En déduire que la v.a. X est gaussienne et que $\mathbb{E}X_n^2 \longrightarrow \mathbb{E}X^2$.
3. Soit Y une v.a. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ et, pour tout $n \geq 1$, $Y_n = (-1)^n Y$. Vérifier $(Y_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables gaussiennes convergeant en loi vers Y mais qu'elle n'est pas convergente dans L^2.

Exercice 8

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes de loi Normale $\mathcal{N}(0,1)$. Déterminer la limite en loi de la suite

$$Y_n = \frac{1}{n^{3/2}}\sum_{k=1}^{n} k\ X_k.$$

Exercice 9

Soient X, Y, Z des v.a. i.i.d. de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On définit

$$U = \frac{X + YZ}{\sqrt{1+Z^2}}$$

.

Montrer que U et Z sont i.i.d.

Exercice 10 Théorème de Bernstein

Soient X et Y deux v.a. réelles indépendantes et telles que $X+Y$ et $X-Y$ soient indépendantes. On cherche à montrer que X et Y sont des v.a. gaussiennes.

1. Soit γ la fonction caractéristique de $X+Y$, montrer que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\gamma(u+v)\gamma(u-v) = \gamma(u)^2|\gamma(v)|^2$.
2. Soit Z une v.a. indépendantes de $X+Y$ et de même loi que $-(X+Y)$. Soit δ la fonction caractéristique de $X+Y+Z$, montrer que $\delta(u+v)\delta(u-v) = \delta(u)^2\delta(v)^2$. En déduire que $G = \{t \in \mathbb{R} \mid \delta(t) \neq 0\}$ est un groupe, puis que $G = \mathbb{R}$. Déterminer enfin δ et $|\gamma|$.
3. Soit $g(t) = \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}$, montrer que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $g^2(u+v) = g(u)^2 g(v)^2$.
4. Montrer que $g^2(u) = exp(2imt), m \in \mathbb{R}$. Pour cela, on montrera que si $f(x) = \int_0^x g^2(t)dt$, il existe a tel que $f(a) \neq 0$, puis que $g^2(x) = \frac{f(x+a)-f(x)}{f(a)}$ et enfin que g^2 est dérivable.
5. Montrer que X et Y sont gaussiennes, puis généraliser ce résultat à des variables à valeur $\mathbb{R}^d$.