Feuille de TD 5 : Martingales et mouvement Brownien.

Exercice 1 Ruine du joueur dans le cas biaisé Soit $S_n = a + \sum_{i=1}^n X_i$ avec X_i des variables indépendantes de même loi $p\delta_1 + q\delta_{-1}$ avec $p \in]1/2, 1[$. On considère la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$. S_n représente la richesse d'un joueur à l'instant n, avec probabilité p il reçoit 1 euro de la banque et il perd 1 euro avec probabilité q. On suppose que la banque possède b euros au départ et le joueur a euros. Le jeu continue jusqu'à la ruine du joueur ou de la banque, c'est-à-dire jusqu'au temps :

$$T = \inf\{n \geqslant 0 \mid S_n = 0 \text{ ou } S_n = a + b\}.$$

1. Montrer que T est un temps d'arrêt.
2. Montrer que $Y_n = S_n - n(p - q)$ est une martingale.
3. Appliquer le 1er théorème d'arrêt à Y_n et $T \wedge n$ et déduire que
$$E[T] \leqslant \frac{b}{p-q} < \infty.$$
4. En appliquant le Théorème d'arrêt de Doob ou un théorème limite, montrer que
$$E[T] = \frac{(a+b)P(S_T = a+b) - a}{p-q}.$$
5. Soit $Z_n = (\frac{q}{p})^{S_n}$. Montrer que Z_n est une martingale et que $(Z_{T\wedge n})$ est une martingale bornée dans L^∞.
6. Montrer que :
$$P(S_T = a+b) = \frac{1 - (\frac{q}{p})^a}{1 - (\frac{q}{p})^{a+b}} \qquad P(S_T = 0) = \frac{(\frac{q}{p})^a - (\frac{q}{p})^{a+b}}{1 - (\frac{q}{p})^{a+b}}$$
7. Montrer que S_n est une sous-martingale. Converge-t-elle p.s. ? (utiliser la loi des grands-nombres).

Exercice 2 Ruine du joueur dans le cas non-biaisé On reprend les notations de l'exercice précédent mais avec $p = 1/2$.

1. Montrer que $B_n = S_n^2 - n$ est une martingale.
2. Appliquer le 1er théorème d'arrêt à B_n et $T \wedge n$ et déduire que
$$E[T] \leqslant (a+b)^2 - a^2 < \infty.$$
3. Montrer que $S_{T\wedge n}$ est une martingale bornée dans L^∞ et converge donc p.s. et dans tout $L^p, p > 1$. Déduire du théorème d'arrêt $\mathbf{E}[S_T]$.
4. Montrer que :
$$P(S_T = a+b) = \frac{a}{a+b}.$$
5. En utilisant la convergence dans L^2 vue auparavant, montrer que
$$E[T] = \mathbf{E}[S_T^2] - a^2 = ab.$$
6. Montrer que S_n est une martingale. Converge-t-elle p.s. ? (utiliser le TCL).

Exercice 3

Soient $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Z_t = \sqrt{t}Z$ pour $t \geqslant 0$. Est-ce que $(Z_t)_{t\geqslant 0}$ est un processus gaussien ? Est-ce un mouvement brownien ?

Exercice 4 Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien.

On pose $V_0 = 0$, et pour $t > 0$, $V_t = tB_{1/t}$.

1. Montrer que (V_t) est un mouvement brownien.
2. Montrer que pour tout $(s,t) \in [0, \infty[^2$, $\mathbf{E}(B_s B_t^2) = 0$.