Contrôle continu 1

25 février 2019

L'épreuve dure 60 minutes. Il y a deux exercices. Le barème, indicatif, est indiqué entre crochets [ ]. Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. On prendra soin de **justifier** les réponses.

Exercice 1 (Convergence d'intégrales impropres [10 points]).

1. [3 pts] Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale suivante converge-t-elle ?

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^\alpha}\, dx$$

2. [3 pts] L'intégrale suivante est-elle convergente ou divergente ?

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2} e^{-x}\, dx$$

3. [4 pts] On veut démontrer que l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\, dx. \qquad (I)$$

   (a) [1 pt] En utilisant le changement de variables $y = x^2$, montrez que

$$\int_0^b \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{b^2} y^{-1/2} \cos y\, dy.$$

   (b) [1 pt] Par une intégration par parties, montrez que

$$\int_1^\infty y^{-1/2} \cos y\, dy$$

   est une intégrale convergente.

   (c) [2 pts] En déduire que l'intégrale (I) est convergente.

Exercice 2 (Intégrale à paramètre [10 points]). Le but de cet exercice est d'étudier la fonction (de x) définie par l'intégrale suivante :

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-x(t+1)} \frac{\cos t}{1+t}\, dt.$$

1. [3 pts] Quel est le domaine de définition de f, c'est-à-dire pour quelles valeurs de $x \geqslant 0$ l'intégrale converge-t-elle ?
2. [3 pts] En utilisant le théorème de convergence dominée, calculer la limite de $f(n)$ quand $n \in \mathbb{N}$ tend vers ∞. Justifier soigneusement que les hypothèses du théorème sont vérifiées.
3. [4 pts] Montrer que f est dérivable pour tout $x > 1$ et que

$$f'(x) = -\frac{x}{1+x^2}\, e^{-x}.$$