Contrôle continu 1

25 février 2019

L'épreuve dure 60 minutes. Il y a deux exercices (recto et verso). Le barème, indicatif, est indiqué entre crochets [ ]. Les documents, calculatrices et téléphones portables ne sont pas autorisés. On prendra soin de **justifier** les réponses.

Exercice 1 (Convergence d'intégrales impropres [10 points]).

1. [3 pts] Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale suivante converge-t-elle ?

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^\alpha}\, dx$$

2. [3 pts] L'intégrale suivante est-elle convergente ou divergente ?

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^2} e^{-x}\, dx$$

3. [4 pts] On veut démontrer que l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\, dx. \qquad (I)$$

(a) [1 pt] En utilisant le changement de variables $y = x^2$, montrez que

$$\int_1^b \cos(x^2)\, dx = \frac{1}{2}\int_1^{b^2} y^{-1/2}\cos y\, dy.$$

(b) [1 pt] Par une intégration par parties, montrez que

$$\int_1^\infty y^{-1/2}\cos y\, dy$$

est une intégrale convergente.

(c) [2 pts] En déduire que l'intégrale (I) est convergente.

Correction.

1. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc intégrable sur $[0, b]$ pour tout $b \in \mathbb{R}_+$. Or $f(x) \sim_{x\to\infty} x^{1/2-\alpha} \geqslant 0$ et intégrable sur $[a, \infty[$ pour tout $a > 0$ et tout $\alpha > 3/2$.
2. Soit $f : x \mapsto \frac{\sin x}{x^2} e^{-x}$. f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En 0, f est équivalente à $1/x$ qui n'est pas intégrable en 0. L'intégrale est donc divergente. On pouvait aussi remarquer que f est intégrable à l'infini car sa valeur absolue est majorée par e^{-x}.
3. On notera encore une fois f l'intégrande.

(a) Par le changement de variables $y = x^2$, on a $dy = 2xdx \iff dx = \frac{1}{2\sqrt{y}}dy$. $x = 1 \Rightarrow y = 1$ et $x = b \Rightarrow y = b^2$.

(b) Par parties, on va dériver $y^{-1/2}$ et intégrer le cos :

$$\int_1^\infty y^{-1/2}\cos y\, dy = [y^{-1/2}\sin y]_1^\infty + \frac{1}{2}\int_1^\infty y^{-3/2}\sin y\, dy = -\sin(1) + \frac{1}{2}\int_1^\infty y^{-3/2}\sin y\, dy.$$

Or $|y^{-3/2}\sin y| \leqslant y^{-3/2}$ qui est positive et intégrable sur $[1, \infty[$.

(c) $x \mapsto \cos(x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc intégrable sur tout intervalle fermé $[0, a]$. Le problème est en l'infini *seulement* mais la méthode employée pour montrer la convergence nécessite de découper l'intgérale en deux, par exemple de 0 à 1 et de 1 à ∞. Ainsi

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \int_0^1 \cos(x^2)\,dx + \int_1^\infty \cos(x^2)\,dx$$
$$= \int_0^1 \cos(x^2)\,dx + \lim_{b\to\infty} \int_1^b \cos(x^2)\,dx.$$

La première intégrale du membre de droite est convergente (comme intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé). Pour montrer la convergence de la deuxième, on commence par effectuer le changement de variable de la question (3a). Ensuite on applique le résultat de la question (3b). ✓

Exercice 2 (Intégrale à paramètre [10 points]). Le but de cet exercice est d'étudier la fonction (de $x \in [0, +\infty[$) définie par l'intégrale suivante :

$$f(x) = \int_0^\infty e^{-x(t+1)} \frac{\cos t}{1+t}\,dt.$$

1. [3 pts] Quel est le domaine de définition de f, c'est-à-dire pour quelles valeurs de $x \geqslant 0$ l'intégrale converge-t-elle ?
2. [3 pts] En utilisant le théorème de convergence dominée, calculer la limite de $f(n)$ quand $n \in \mathbb{N}$ tend vers ∞. Justifier soigneusement que les hypothèses du théorème sont vérifiées.
3. [4 pts] Montrer que f est dérivable pour tout $x > 1$ et que

$$f'(x) = -\frac{x}{1+x^2}\,e^{-x}.$$

Correction. — Dans toute la suite, on notera $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction qui à (x, t) associe $e^{-x(t+1)} \frac{\cos t}{1+t}$.

1. Pour tout $x \geqslant 0$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc intégrable sur tout intervalle fermé de la forme $[0, a]$ où $a \in \mathbb{R}_+$. La question de l'intégrabilité de g se concentre donc en l'infini. Pour tout $x > 0$, $|g(x, t)| \leqslant e^{-xt}$ qui est positif et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En $x = 0$, l'étude est plus délicate. On a $g(0, t) = \frac{\cos t}{1+t}$. On ne peut pas simplement borner $|\cos t|$ par 1 car $\frac{1}{1+t}$ n'est pas intégrable à l'infini. Mais on peut, comme dans la question (3) du premier exercice, intégrer par parties :

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{1+t}\,dt = \left[\frac{\sin t}{1+t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{\sin t}{(1+t)^2}\,dt = \int_0^\infty \frac{\sin t}{(1+t)^2}\,dt.$$

   Puis $|\sin t| \leqslant 1$ et $1/(1+t)^2$ est integrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Pour appliquer le théorème de convergence dominée, il faut
   - que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto g(n, t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$,
   - que la suite de fonctions $h_n \coloneqq g(n, \cdot)$ converge simplement (vers une fonction qu'on notera h),
   - qu'il existe une fonction $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ intégrable et telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout n (à partir d'un certain rang), $|g(n, t)| \leqslant G(t)$.

   D'après la première question, la première hypothèse est vérifiée. Concernant la deuxième hypothèse, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\lim_{n\to\infty} g(n, t) = 0$ ainsi la limite quand n tend vers l'infini de h_n est la fonction constante égale à 0. Pour la majoration, on remarque que $|\cos t| \leqslant 1$, que $1/(1+t) \leqslant 1$ et que pour $n \geqslant 1$, $e^{-n(t+1)} \leqslant e^{-t}$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $n \geqslant 1$, $|g(n, t)| \leqslant e^{-t}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

   On peut donc appliquer le TCD qui nous assure que

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \int_0^\infty \lim_{n\to 0} e^{-n(t+1)} \frac{\cos t}{1+t}\,dt = \int_0^\infty 0\,dt = 0.$$

3. Pour montrer la dérivabilité de f, on va appliquer le théorème de dérivabilité avec hypothèse de domination. Pour cela, il faut :
   - que pour tout $x \in [1, \infty[$, la fonction $t \mapsto g(x, t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$,
   - que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto g(x, t)$ admette une dérivée partielle (par rapport à x) et que cette dérivée soit intégrable (par rapport à t) sur $\mathbb{R}_+$,
   - qu'il existe une fonction $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ intégrable telle que pour tout $x \in [1, \infty[$, $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| \leqslant G(t)$.

   La première hypothèse correspond à la première question de cet exercice. Ensuite, la fonction $x \mapsto e^{-x(t+1)}$ est évidemment dérivable par rapport à x et $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = e^{-x(t+1)} \cos t$ qui est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car majorée en valeur absolue par e^{-t}). Enfin, on vient de l'écrire, la majoration est donnée par $G(t) = e^{-t}$. Le théorème s'aplique donc et il nous certifie que

   (a) f est dérivable sur $[1, \infty[$, et que

   (b)
   $$f'(x) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} e^{-x(t+1)} \frac{\cos t}{1 + t}\, dt = \int_0^\infty e^{-x(t+1)} \cos t \, dt$$

   dont la valeur explicite s'obtient par deux intégrations par parties successives. ✓