Université Claude Bernard | UE Mathématiques 4
L2 **PCSI** | 2018-2019

Contrôle continu du Lundi 18 mars 2019

Durée : 1 heure.

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin à JUSTIFIER les réponses aux exercices.
On ne demande PAS de justifier l'intégrabilité des fonctions.
Vous pouvez utiliser les formules du formulaire joint librement en faisant référence à leur nom ou leur numéro.
Le sujet contient 4 exercices dont deux questions de cours à l'exercice 4.

On rappelle que, pour $I = [a, b]$ un intervalle, la fonction indicatrice de I est la fonction suivante :

$$1_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Exercice 1 :[5 points]

Calculer les produits de convolution suivants pour $a > 0$:

1. $$\sin * 1_{[-a,a]}$$

2. Soit $h(x) = e^{-bx}$ avec $b \geq 0$, calculer
$$h * 1_{[0,2a]}.$$

Exercice 2 :[5 points]

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction
$$J_a(x) = x 1_{[-a,a]}(x),$$

2. En déduire la valeur de l'intégrale :
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p\cos(p) - \sin(p))^2}{p^4} dp.$$

Pour les exercices suivants, on pensera à utiliser les transformées de Fourier usuelles du formulaire joint.

Exercice 3 :[5 points] Pour $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$, on note $f_a(x) = \dfrac{1}{a^2 + x^2}$ et $h_a(x) = e^{-a|x|}$.

1. Calculer ou rappeler (en utilisant des résultats du cours ou du formulaire) les transformées de Fourier de f_a et h_a.
2. Pour $a, b > 0$, calculer la transformée de Fourier de la fonction obtenue par convolution de f_a et f_b, à savoir :
$$\widehat{f_a * f_b}.$$
3. Montrer que $\widehat{f_a * f_b} = c\widehat{f_{a+b}}$ avec une constante c que l'on calculera en fonction de a et b.
4. En déduire, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_a * f_b(x)$.

Exercice 4 :[5 points]

1. Rappeler le résultat du cours qui exprime la transformée de Fourier $\widehat{h}(p)$ de $h(x) = xf(x)$ à l'aide de $\widehat{f}$.
2. Rappeler le résultat du cours qui exprime la transformée de Fourier $\widehat{G'}(p)$ de la dérivée $G'(x)$ de G à l'aide de $\widehat{G}$.
3. En utilisant par exemple une des questions précédentes, calculer la transformée de Fourier de la fonction
$$g(x) = xe^{-x^2/2}.$$

Formulaire pour le Controle continu 2

(1) La transformée de Fourier de f est
$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x)dx.$$

(2) Formule d'inversion :
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(p)e^{ipx}dp.$$

(3) Le produit de convolution est :
$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

(4) Formule de Plancherel :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(p)|^2 dp.$$

(5) Transformée de Laplace de $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$: $\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$

Transformées de Fourier usuelles

δ_a est la masse de Dirac en a.

	$f(x)$	$\hat{f}(p) = \mathcal{F}[f](p)$
(6)	$\delta_a(x) = \delta(x-a)$	e^{-ipa}
(7)	$g_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0$	$e^{-\frac{p^2\sigma^2}{2}}$
(8)	$\frac{c}{c^2+x^2}, c > 0$	$\pi e^{-c\|p\|}$
(9)	$h(sx), s > 0$	$\frac{1}{s}\hat{h}(\frac{p}{s})$
(10)	$\frac{1}{s}h(\frac{x}{s}), s > 0$	$\hat{h}(sp)$
(11)	$h(x-a), a > 0$	$e^{-ipa}\hat{h}(p)$

Transformées de Laplace usuelles

(12)	$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
(13)	$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
(14)	$e^{at}\cos(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2}$
(15)	$e^{at}\sin(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
(16)	$e^{ta}h(t), a > 0$	$\mathcal{L}[h](s-a)$

(17) **Décomposition en élément simple de** $Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ avec $q(s) = a(s-s_1)^{m_1} \cdots (s-s_k)^{m_k}$ et $deg(p) < deg(q)$ de la forme :
$$Y(s) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j}, \qquad \text{avec } a_{i,j} = \frac{1}{(m_i-j)!} \left[\frac{d^{(m_i-j)}}{ds^{(m_i-j)}} (Y(s)(s-s_i)^{m_i}) \right]_{s=s_i}.$$