Université Claude Bernard | UE Mathématiques 4
L2 **PCSI** | 2018-2019

Contrôle continu du Lundi 18 mars 2019

Durée : 1 heure.

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin à JUSTIFIER les réponses aux exercices.
On ne demande PAS de justifier l'intégrabilité des fonctions.
Vous pouvez utiliser les formules du formulaire joint librement.
Le sujet contient 4 exercices dont deux questions de cours à l'exercice 4.

On rappelle que, pour $I = [a, b]$ un intervalle, la fonction indicatrice de I est la fonction suivante :

$$1_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Exercice 1 :[5 points]

Calculer les produits de convolution suivants pour $a > 0$:

1. $$\sin *1_{[-a,a]}$$

   C'est le calcul :

$$(sin*1_{[-a,a]})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x-y)1_{[-a,a]}(y)dy = \int_{-a}^{a} \sin(x-y)dy = [\cos(x-y)]_{-a}^{a} = \cos(x-a)-\cos(x+a)$$

2. Soit $h(x) = e^{-bx}$ avec $b \geq 0$, calculer
$$h * 1_{[0,2a]}.$$

   On a deux cas : si $b > 0$

$$(h * 1_{[0,2a]})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-b(x-y)}1_{[0,2a]}(y)dy = \int_{0}^{2a} e^{-b(x-y)}dy = [\frac{e^{-b(x-y)}}{b}]_0^{2a} = \frac{e^{-bx}(e^{2ab}-1)}{b}$$

   Si $b = 0$ c'est plus simple mais différent (la convolution est constante) :

$$(h * 1_{[0,2a]})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 1_{[0,2a]}(y)dy = \int_{0}^{2a} dy = 2a.$$

Exercice 2 :[5 points]

1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$J_a(x) = x1_{[-a,a]}(x),$$

   Par le cours, on a $\hat{h}'(p) = \int_{\mathbb{R}} -ixe^{-ipx}h(x)dx = -i\widehat{(xh)}(p)$. Donc si $h(x) = 1_{[-a,a]}(x)$, on a $\hat{J}_a(p) = \widehat{xh}(p) = i\hat{h}'(p)$

Or
$$\hat{h}(p) = \int_{-a}^{a} e^{-ipx}dx = \frac{e^{ipa} - e^{-ipa}}{ip} = \frac{2sin(pa)}{p}$$
(en utilisant la formule d'Euler $sin(pa) = \frac{e^{ipa}-e^{-ipa}}{2i}$) donc $\hat{h}'(p) = 2a\frac{cos(pa)}{p} - \frac{2sin(pa)}{p^2}$ donc
$$\hat{J}_a(p) = 2i\left(\frac{pa\cos(pa) - \sin(pa)}{p^2}\right).$$

2. La valeur de l'intégrale s'obtient par la formule de Plancherel (attention il y a un module donc pas de signe $|i| = 1$ et on prend $a = 1$ dans la formule précédente) :
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(p\cos(p) - \sin(p))^2}{p^4}dp = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{J}_1(p)|^2dp = \frac{2\pi}{4}\int_{-\infty}^{\infty} (J_1(x))^2dx = \frac{2\pi}{4}\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{2\pi}{4}[x^3/3]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{3}$$

Pour les exercices suivants, on pensera à utiliser les transformées de Fourier usuelles du formulaire joint.

Exercice 3 :[5 points] Pour $x \in \mathbb{R}$ et $a > 0$, on note $f_a(x) = \dfrac{1}{a^2 + x^2}$ et $h_a(x) = e^{-a|x|}$.

1. Calculer ou rappeler (en utilisant des résultats du cours ou du formulaire) les transformées de Fourier de f_a et h_a.
   Par la formule (8) $\widehat{af_a}(p) = \pi e^{-a|p|}$ donc par linéarité $\widehat{f_a}(p) = \frac{\pi}{a}e^{-a|p|} = \frac{\pi}{a}h_a(p)$.
   Par inversion de Fourier $\frac{\pi}{a}\widehat{h_a}(p) = 2\pi f_a(p)$ donc $\widehat{h_a}(p) = \dfrac{2a}{a^2 + p^2}$.
2. Pour $a, b > 0$, calculer la transformée de Fourier de la fonction obtenue par convolution :
$$f_a * f_b.$$
   Par la formule du cours
$$\widehat{f_a * f_b}(p) = \widehat{f_a}(p)\widehat{f_b}(p) = \frac{\pi}{a}e^{-a|p|}\frac{\pi}{b}e^{-b|p|}$$
3. Par le 2et le 1, on veut
$$c\widehat{f_{a+b}}(p) = \frac{\pi}{a}e^{-a|p|}\frac{\pi}{b}e^{-b|p|}$$
   donc $\widehat{f_a * f_b} = c\widehat{f_{a+b}}$ avec une constante $c = \frac{\pi(a+b)}{ab}$.
4. En déduire, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_a * f_b(x)$.
   Par le théorème d'inversion de FOurier (unicité) (utilisant la continuité des deux membres, mais ce n'est pas demandé aux étudiants)
$$f_a * f_b(x) = \frac{\pi(a+b)}{ab}\frac{1}{(a+b)^2 + x^2}.$$

Exercice 4 :[5 points]

1. Rappeler le résultat du cours qui exprime la transformée de Fourier $\widehat{h}(p)$ de $h(x) = xf(x)$ à l'aide de $\widehat{f}$.
$$\widehat{h}(p) = i(\widehat{f})'(p)$$

2. Rappeler le résultat du cours qui exprime la transformée de Fourier $\widehat{G'}(p)$ de la dérivée $G'(x)$ de G à l'aide de $\widehat{G}$.

$$\widehat{G'}(p) = ip\widehat{G}(p)$$

3. En utilisant par exemple une des questions précédentes, calculer la transformée de Fourier de la fonction
$$g(x) = xe^{-x^2/2}.$$

Méthode 1 : On remarque $g(x) = G'(x)$ avec $G(x) = -e^{-x^2/2}$. Par linéarité et formule (7) $\widehat{G}(p) = -\sqrt{2\pi}e^{\frac{-p^2}{2}}$.
donc par le 2
$$\widehat{G'}(p) = -ip\sqrt{2\pi}e^{\frac{-p^2}{2}}$$

Méthode 2 : $g(x) = xf(x)$ avec $f(x) = e^{-x^2/2}$, Par linéarité et formule (7) $\widehat{G}(p) = \sqrt{2\pi}e^{\frac{-p^2}{2}}$.
donc par le 2
$$\widehat{g}(p) = i\sqrt{2\pi}\frac{d}{dp}(e^{\frac{-p^2}{2}}) = -ip\sqrt{2\pi}e^{\frac{-p^2}{2}}$$
