Université Claude Bernard — UE Mathématiques 4
L2 **PCSI** — 2018-2019

Contrôle continu du Lundi 8 avril 2019

Durée : 1 heure.

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin à JUSTIFIER les réponses aux exercices.
Vous pouvez utiliser les formules du formulaire joint librement.
Le sujet contient 3 exercices.

Exercice 1 :[10 points]

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$Y(s) = \frac{s^2 - 3s + 3}{(s-1)(s^2 - 2s + 2)}.$$

2. Trouver la fonction f qui a pour transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)(s) = Y(s)$ pour :

$$Y(s) = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s^2 - 2s + 2} = \frac{a}{s-1} + \frac{ib}{2(s-1+i)} - \frac{ib}{2(s-1-i)},$$

avec a, b des nombres réels. (L'égalité élémentaire ci-dessus n'a pas besoin d'être démontrée et peut-être utilisée librement si besoin est. i est le nombre complexe usuel tel que $i^2 = -1$)

3. En déduire la solution de l'équation différentielle :

$$f''(t) - 2f'(t) + 2f(t) = e^t$$

avec les conditions initiales $f(0) = 1, f'(0) = 0$.

Exercice 2 :[6 points]

Soit

$$f(x) = x1_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calculer les dérivées premières et secondes au sens des distributions $(T_f)'$ et $(T_f)''$.

Exercice 3 :[4 points]

Soit $g(x) = (2 - x^2)$ et δ_0 la masse de Dirac en 0. Trouver les primitives de la distribution :

$$S = g\delta_0.$$

Formulaire pour le Contrôle continu 3

(1) La transformée de Fourier de f est $\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x)dx$.

(2) Formule d'inversion : $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(p) e^{ipx} dp$.

(3) Le produit de convolution est : $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy$.

(4) Formule de Plancherel : $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(p)|^2 dp$.
(5) Transformée de Laplace de $f : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$:

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Transformées de Fourier usuelles
δ_a est la masse de Dirac en a.

	$f(x)$	$\hat{f}(p) = \mathcal{F}[f](p)$
(6)	$\delta_a(x) = \delta(x-a)$	e^{-ipa}
(7)	$g_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0$	$e^{-\frac{p^2\sigma^2}{2}}$
(8)	$\frac{c}{c^2+x^2}, c > 0$	$\pi e^{-c\|p\|}$
(9)	$h(sx), s > 0$	$\frac{1}{s}\hat{h}(\frac{p}{s})$
(10)	$\frac{1}{s}h(\frac{x}{s}), s > 0$	$\hat{h}(sp)$
(11)	$h(x-a), a > 0$	$e^{-ipa}\hat{h}(p)$

Transformées de Laplace usuelles

(12)	$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
(13)	$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
(14)	$e^{at}\cos(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2}$
(15)	$e^{at}\sin(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
(16)	$e^{ta}h(t), a > 0$	$\mathcal{L}[h](s-a)$

(17) **Décomposition en élément simple de** $Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ avec $q(s) = a(s-s_1)^{m_1}\cdots(s-s_k)^{m_k}$ et $deg(p) < deg(q)$ de la forme :

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j}, \qquad \text{avec } a_{i,j} = \frac{1}{(m_i-j)!}\left[\frac{d^{(m_i-j)}}{ds^{(m_i-j)}}(Y(s)(s-s_i)^{m_i})\right]_{s=s_i}.$$

Formules sur les distributions

T, S distributions (dont une à support compact) et f fonction test, g fonction infiniment dérivable, h localement intégrable, h_1, h_2 intégrables et $a, b \in \mathbb{R}$.

$$T'(f) = -T(f') \tag{18}$$

$$(gT)(f) = T(fg) \tag{19}$$

$$T_h(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(x)dx. \tag{20}$$

$$T_{h_1} * T_{h_2} = T_{h_1 * h_2} \tag{21}$$

$$(\delta_a * h) = h_a, \text{ avec } h_a(x) = h(x-a). \tag{22}$$

$$(\delta_a * T) = T_a, \text{ avec } T_a(f) = T(f_{-a}), f_a(x) = f(x-a). \tag{23}$$

$$\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b} \tag{24}$$

$$(S*T)' = S' * T = S * T' \tag{25}$$

Dérivées de fonctions continues par morceaux Soit $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 par morceaux avec des sauts en $a_i \in A$.

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{k=1}^{n}(f(a_k^+) - f(a_k^-))\delta_{a_k} \tag{26}$$

Transformées de Fourier de distributions δ_a est la masse de Dirac en a.

	T	$\hat{T}(p) = \mathcal{F}[T](p)$
(27)	$\delta_a(x) = \delta(x-a)$	e^{-ipa}
(28)	1	$2\pi\delta_0(p)$