Université Claude Bernard — UE Mathématiques 4
L2 **PCSI** — 2018-2019

Correction du Contrôle continu du Lundi 8 avril 2019

Exercice 1 :[10 points] La méthode réelle est donnée à la fin du corrigé.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$Y(s) = \frac{s^2 - 3s + 3}{(s-1)(s^2 - 2s + 2)}.$$

Comme le dénominateur est $(s-1)(s-1+i)(s-1-i)$ la décomposition (complexe) est de la forme :

$$Y(s) = \frac{a}{s-1} + \frac{B}{(s-1+i)} + \frac{C}{(s-1-i)}$$

On calcule $Y(s)(s-1) = \frac{s^2-3s+3}{(s^2-2s+2)}$ l'évaluation en 1 donne $a = \frac{1-3+3}{(1-2+2)} = 1$
Ensuite $Y(s) - \frac{1}{s-1} = \frac{s^2-3s+3}{(s-1)(s^2-2s+2)} - \frac{s^2-2s+2}{(s-1)(s^2-2s+2)} = \frac{-s+1}{(s-1)(s^2-2s+2)} = \frac{-1}{(s^2-2s+2)}$
Donc on trouve par la formule du 2, $B = -i/2, C = i/2$ ($b = -1$).
Autre méthode : Pour le calcul de C, on regarde $Y(s)(s-1-i) = \frac{s^2-3s+3}{(s-1)(s-1+i)}$
En évaluant en $s = 1+i$ on obtient (en utilisant que $(1+i)$ vérifie $s^2 = (2s-2)$) $C = \frac{-(1+i)+1}{(1+i-1)(1+i-1+i)} = \frac{-i}{i2i} = \frac{i}{2}$.
Comme l'expression de départ est réelle, forcément, $B = \overline{C} = -i/2$. D'où la même réponse.

2. Trouver la fonction f qui a pour transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)(s) = Y(s)$ pour :

$$Y(s) = \frac{a}{s-1} + \frac{b}{s^2-2s+2} = \frac{a}{s-1} + \frac{ib}{2(s-1+i)} - \frac{ib}{2(s-1-i)},$$

avec a, b des nombres réels. (L'égalité élémentaire ci-dessus n'a pas besoin d'être démontrée et peut-être utilisée librement si besoin est. i est le nombre complexe usuel tel que $i^2 = -1$)
Ici on utilise l'expression complexe. Par la table $\mathcal{L}(e^{ct}) = \frac{1}{s-c}$ (même pour c complexe).
donc

$$f(t) = ae^t + \frac{ib}{2}e^{t-it} - \frac{ib}{2}e^{t+it} = ae^t - \frac{b}{2i}e^{t-it} + \frac{b}{2i}e^{t+it} = ae^t - be^t\sin(t)$$

3. En déduire la solution de l'équation différentielle :

$$f''(t) - 2f'(t) + 2f(t) = e^t$$

avec les conditions initiales $f(0) = 1, f'(0) = 0$.
(voir à la fin du sujet, même méthode que dans la solution réelle, on trouve la transformée de Laplace du 1, qui donne par le 2 avec $a = 1$,$b = -1$ la solution cherchée).

Exercice 2 :[6 points]

Soit

$$f(x) = x1_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Calculons les dérivées premières et secondes au sens des distributions $(T_f)'$ et $(T_f)''$.

On utilise la formule des sauts (cf. formulaire) Ici le saut en 0 est 0 et celui en 1 est $f(1^+)-f(1^-) = (0-1)$ donc :

$$(T_f)' = T_{f'} - \delta_1,$$

et $f'(x) = 1_{[0,1]}(x)$.

De même, par linéarité de la dérivée

$$(T_f)'' = (T_{f'})' - \delta_1'.$$

On calcule la formule des sauts $f'(0^+) - f'(0^-) = 1$ et $f'(1^+) - f'(1^-) = -1$ donc :

$$(T_{f'})' = \delta_0 - \delta_1.$$

Donc, on obtient :

$$(T_f)'' = \delta_0 - \delta_1 - \delta_1'.$$

Exercice 3 :[4 points]

Soit $g(x) = (2 - x^2)$ et δ_0 la masse de Dirac en 0. Trouvons les primitives de la distribution :

$$S = g\delta_0.$$

D'abord, on calcule par la formule du cours

$$S = g\delta_0 = g(0)\delta_0 = 2\delta_0.$$

(En effet, on rappelle comment on a montré cela en cours : $(g\delta_0)(f) = \delta_0(fg) = f(0)g(0) = g(0)\delta_0(f)$).

Or, on a vu $(T_H)' = \delta_0$ avec $H = 1_{[0,+\infty[}$ la fonction de Heaviside.

Donc les primitives de S sont $2T_H + c$ pour une constante $c \in \mathbb{R}$.

Correction de CC3

1. Décomposer en éléments simples la fonction Y définie par
$$Y(s) = \frac{s^2 - 3s + 3}{(s-1)(s^2 - 2s + 2)}$$
2. Soient a et b réels, déterminer la fonction dont la transformée de Laplace est
$$\frac{a}{s-1} + \frac{bs + c}{s^2 - 2s + 2}$$
3. En déduire la solution de l'équation différentielle :
$$f''(t) - 2f'(t) + 2f(t) = e^t$$
Avec les condition initiales $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$

Correction

1.
$$Y(s) = \frac{s^2 - 3s + 3}{(s-1)(s^2 - 2s + 2)}$$
$s^2 - 2s + 2$ n'a pas de racine réelles donc
Donc il existe a, b et c trois réels tels que :
$$\frac{s^2 - 3s + 3}{(s-1)(s^2 - 2s + 2)} = \frac{a}{s-1} + \frac{bs + c}{s^2 - 2s + 2}$$
On multiplie par $s - 1$, puis $s = 1$
$$a = \left[\frac{s^2 - 3s + 3}{s^2 - 2s + 2}\right]_{s=1} = 1$$
$s = 0$
$$-\frac{3}{2} = -a + \frac{c}{2} \Rightarrow c = -1$$
On multiplie par s, puis $s \to +\infty$
$$1 = a + b \Rightarrow b = 0$$
Donc $Y(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2-2s+2}$
Autre méthode
$$\frac{s^2 - 3s + 3}{(s-1)(s^2 - 2s + 2)} = \frac{s^2 - 2s + 2 - (s-1)}{(s-1)(s^2 - 2s + 2)} = \frac{s^2 - 2s + 2}{(s-1)(s^2 - 2s + 2)} - \frac{s-1}{(s-1)(s^2 - 2s + 2)}$$
$$= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2 - 2s + 2}$$

2.
$$\frac{a}{s-1} + \frac{bs + c}{s^2 - 2s + 2} = \frac{a}{s-1} + \frac{bs + c}{(s-1)^2 + 1} = \frac{a}{s-1} + \frac{b(s-1) + b + c}{(s-1)^2 + 1}$$
$$= \frac{a}{s-1} + b\frac{s-1}{(s-1)^2 + 1} + (b+c)\frac{1}{(s-1)^2 + 1}$$
Donc $f(t) = e^t + be^t\cos(t) + (b+c)e^t\sin(t)$

3.
$$f''(t) - 2f'(t) + 2f(t) = e^t \Leftrightarrow \mathcal{L}(f'')(s) - 2\mathcal{L}(f') + 2\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s-1}$$
$$\Leftrightarrow s^2\mathcal{L}(f) - f'(0) - sf(0) - 2\big(s\mathcal{L}(f) - f(0)\big) + 2\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s-1}$$
$$\Leftrightarrow s^2\mathcal{L}(f) - s - 2(s\mathcal{L}(f) - 1) + 2\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s-1} \Leftrightarrow (s^2 - 2s + 2)\mathcal{L}(f) - s + 2$$
$$= \frac{1}{s-1} \Leftrightarrow (s^2 - 2s + 2)\mathcal{L}(f) = \frac{1}{s-1} + s - 2 = \frac{1 + (s-1)(s-2)}{s-1} = \frac{s^2 - 3s + 3}{s-1}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{L}(f) = \frac{s^2 - 3s + 3}{(s-1)(s^2 - 2s + 2)} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s^2 - 2s + 2} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2 + 1}$$

Donc $f(t) = e^t - e^t\sin(t)$