Université Claude Bernard — UE Mathématiques 4
L2 **PCSI** — 2018-2019

Correction du Contrôle continu final du vendredi 24 mai 2019

Exercice 1 :[5 points]

En utilisant la transformée de Laplace, trouvons la solution de l'équation différentielle :

$$f''(t) - 2f'(t) + f(t) = \sin(t).$$

avec les conditions initiales $f(0) = 1, f'(0) = 0$.

Etape 1 (établir une équation sur la transformée de Laplace 2 points) On rappelle que, par le cours, $\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)$ et donc $\mathcal{L}(f'')(s) = s\mathcal{L}(f')(s) - f'(0) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0)$.

Par ailleurs, on utilise la transformée de Laplace usuelle (comme rappelé dans le formulaire (14) pour $a = 0, \omega = 1$) : $\mathcal{L}(\sin)(s) = \frac{1}{1+s^2}$. En conséquence, toute solution f de l'équation ci-dessus, doit vérifier :

$$s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0) - 2(s\mathcal{L}(f)(s) - f(0)) + \mathcal{L}(f)(s) = (s^2-2s+1)\mathcal{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0) + 2f(0) = \frac{1}{1+s^2}.$$

En prenant compte les conditions initiales, on a donc :

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s-2}{(s-1)^2} + \frac{1}{(1+s^2)(s-1)^2} = \frac{1}{(s-1)} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{(1+s^2)(s-1)^2}.$$

Etape 2 (Décomposition en éléments simples : 2,5 points) Pour pouvoir trouver la transformée inverse, on décompose en élément simple le dernier terme $h(s) = \frac{1}{(1+s^2)(s-1)^2}$.

comme $(1+s^2)(s-1)^2 = (s+i)(s-i)(s-1)^2$, la décomposition a pour forme :

$$\frac{1}{(1+s^2)(s-1)^2} = \frac{A}{(s-1)} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-i)} + \frac{D}{(s+i)}.$$

On sait que, C, D sont les résidus en i et $-i$, donc comme la fraction rationnelle est réelle, on obtient $D = \overline{C}$.

Comme le numérateur est constant et n'a donc pas de racines, on obtient que $i, -i$ sont des pôles d'ordre 1, et 1 est un pôle d'ordre 2.

Par le cours, on a donc :

$$C = \lim_{s\to i} \frac{(s-i)}{(s+i)(s-i)(s-1)^2} = \frac{1}{(i+i)(i-1)^2} = \frac{1}{2i(-1-2i+1)} = \frac{1}{4} = \overline{C} = D.$$

et de même (pour résidu en un pôle d'ordre 2)

$$A = Res(h, 1) = \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds}\frac{1}{(1+s^2)} = [\frac{-2s}{(1+s^2)^2}]_{s=1} = -\frac{1}{2}.$$

Enfin on a

$$B = \lim_{s\to 1}(s-1)^2 h(s) = [\frac{1}{(1+s^2)}]_{s=1} = \frac{1}{2}.$$

En bilan :

$$h(s) = -\frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{2(s-1)^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(s+i)} + \frac{1}{(s-i)}\right),$$

et en ajoutant les termes vus plus haut,

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{2(s-1)} - \frac{1}{2(s-1)^2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{(s+i)} + \frac{1}{(s-i)}\right).$$

Dernière étape : inversion de la transformée de Laplace grâce aux cas usuels (formulaire (13) $a = i, -i, 1, n = 0, 1$ et (15)).

On obtient :

$$f(t) = \frac{1}{2}(e^t - te^t) + \frac{1}{4}(e^{-it} + e^{it}) = \frac{1}{2}(e^t - te^t + cos(t)).$$

Exercice 2 :[5 points]

1. Calculons la transformée de Fourier de $F(x) = e^{-2|x|}$.
   Par le cours (formulaire (8) $c = 2$) la transformée de Fourier de $H(x) = \frac{2}{4+x^2}$ est $\hat{H}(p) = \pi e^{-2|p|}$ donc par inversion de Fourier (formulaire formule (2)), la transformée de Fourier de $G(x) = \hat{H}(x) = \pi F(x)$ est $\hat{G}(-p) = 2\pi H(p)$. Donc par linéarité (et parité des fonctions), en divisant par π,
   $$\hat{F}(p) = \hat{G}(-p)/\pi = H(p)/\pi = 2H(p) = \frac{4}{4+x^2}.$$
   Bien sûr on peut aussi faire le calcul directement (cf corrections des CC).
2. Calculons le produit de convolution de F avec F.
   $$F * F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)F(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x-y|}e^{-2|y|}dy.$$
   Il faut découper l'intégrale en 3 pour tenir compte des termes avec valeurs absolues. Or, comme F est paire :
   $$(F*F)(-x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(-x-y)F(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(x+y)F(-y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-z)F(z)dz = F*F(x),$$
   par le changement de variable $z = -y$. Donc $F * F(x) = F * F(|x|)$ pour tout x.
   Donc on peut supposer $x > 0$.
   Par la relation de Chasles, on obtient pour $x > 0$:
   $$\begin{aligned} F * F(x) &= \int_{-\infty}^{0} e^{-2|x-y|}e^{-2|y|}dy + \int_{0}^{x} e^{-2|x-y|}e^{-2|y|}dy + \int_{x}^{\infty} e^{-2|x-y|}e^{-2|y|}dy \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{2(y-x)}e^{2y}dy + \int_{0}^{x} e^{2(y-x)}e^{-2y}dy + \int_{x}^{\infty} e^{2(x-y)}e^{-2y}dy. \end{aligned}$$
   En effet pour $y < 0 < x$, on a $|y| = -y, |y-x| = x-y$, pour $0 < y < x$, on a $|y| = y, |y-x| = x-y$ et pour $0 < x < y$, on a $|y| = y, |y-x| = x-y$

En intégrant, on obtient :

$$F * F(x) = [\frac{1}{4}e^{2(y-x)}e^{2y}]_{-\infty}^{0} + xe^{-2x} + [-\frac{1}{4}e^{2(x-y)}e^{-2y}]_{x}^{\infty} = \frac{1}{4}e^{-2x} + xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}.$$

On a utilisé que les limites $\lim_{y\to-\infty} e^{2(y-x)}e^{2y} = 0, \lim_{y\to+\infty} e^{2(x-y)}e^{-2y} = 0$.
On conclut donc :

$$F * F(x) = \left(\frac{1}{2} + |x|\right) e^{-2|x|}.$$

3. Calculons la transformée de Fourier de $G(x) = \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^2} = \widehat{F}(x)^2$. Soit $k = \widehat{F}$ de sorte que par inversion de Fourier $\widehat{k}(p) = (2\pi)F(-p) = (2\pi)F(p)$.
   Or par le cours on connaît la transformée de Fourier d'un produit :

$$\widehat{G}(p) = \widehat{k^2}(p) = \frac{1}{2\pi}(\widehat{k} * \widehat{k})(p) = (2\pi)(F * F)(p) = (2\pi)\left(\frac{1}{2} + |p|\right) e^{-2|p|} = (\pi + 2\pi|p|)\, e^{-2|p|}.$$

Exercice 3 :[2 points + Bonus : 2 points]

1. (1 point) Soit $b > 0$ et $f(x) = e^{x+bx^4}$. Calculons la distribution

$$f\delta_0'.$$

   (c'est à dire le produit de f avec la dérivée δ_0' de la mesure de Dirac en 0) ?
   On utilise la dérivée d'un produit de distribution par une fonction :
   $(f\delta_0)' = f'\delta_0 + f\delta_0'$. Donc la solution cherchée est :

$$f\delta_0' = (f\delta_0)' - f'\delta_0 = f(0)\delta_0' - f'(0)\delta_0$$

   où on utilise 2 fois la relation du cours $(f\delta_0) = f(0)\delta_0$.
   Or $f(0) = 1$ et $f'(x) = (1 + 4bx^3)f(x)$ donc $f'(0) = 1$. ON obtient la réponse :

$$f\delta_0' = \delta_0' - \delta_0.$$

2. (1 point) On trouve facilement une primitive de $S = f\delta_0'$. En effet δ_0 est par définition une primitive de δ_0, et on sait que pour la fonction de Heaviside H, T_H est une primitive de δ_0.
   Donc une primitive de S est : $\delta_0 - T_H$.
   Rmq : SI on demandait TOUTES les primitives, elles sont de la forme : $\delta_0 - T_{H+c}$ avec c fonction constante.
3. **[Bonus : 2 points]** Soit $a(x) = 1 + x^3$. Trouver les distributions u solutions de l'équation différentielle

$$u' + au = \delta_0'.$$

   1/ On cherche les solutions de l'équation homogènes :
   $v' + av = 0$ On sait qu'elles sont de la forme $v_C = Ce^{-A(x)}$ avec $A(x) = \int_0^x a(t)dt = x + \frac{x^4}{4}$.
   2/ On cherche une solution particulière sous la forme $u = gv_0$ pour une distribution g. Comme vu en cours, on déduit $u' + au = g(v_0' + av_0) + g'v_0 = g'v_0$.

Donc il faut que $g' = (1/v_0)\delta_0' = e^{A(x)}(\delta_0')$ c'est à dire que g doit être la primitive de la question 2 pour $b = 1/4$. Donc $g = \delta_0 - T_H$

3/ Finalement les solutions de l'équation sont sommes d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène et sont donc de la forme, pour une constante C :

$$u = (\delta_0 - T_H + C)e^{-x-\frac{x^4}{4}}.$$

Exercice 4 :[8 points] Soit la fraction rationnelle :

$$g(z) = \frac{z^2 - z + 1}{(z^2+1)(z^2-2z+1)}$$

1. Déterminer les pôles de g avec leur ordre. [1/4 de point par pôle, 1/4 de point par ordre, $0,5$ pour la justification des ordres par les limites ou au moins la non annulation du numérateur !]
   g est une fraction rationnelle donc les pôles sont les racines du dénominateur qui n'annulent pas le numérateur.
   Le dénominateur se factorise $(z^2+1)(z^2-2z+1) = (z-1)^2(z-i)(z+i)$. De plus , $1-1+1 = 1$, $(i)^2 - i + 1 = -i$ et $(-i)^2 + i - 1 = i$ donc $1, i, -i$ ne sont pas des racines du numérateur de g, donc $1, i, -i$ sont des pôles de g.
   On rappelle qu'un pôle z_0 est d'ordre k si $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^k g(z)$ existe mais la limite $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^{k-1}g(z)$ n'existe pas.
   Vérifions que 1 est un pôle d'ordre 2. En effet, $\lim_{z\to 1}(z-1)^2 g(z) = \frac{z^2-z+1}{(z^2+1)}]_{z=1} = \frac{1}{2} \neq 0$ donc $(z-1)^2 g(z) \sim \frac{1}{2(z-1)}$ n'a pas de limite quand $z \to 1$.
   Vérifions que i est un pôle d'ordre 1. En effet,
   $$\lim_{z\to i}(z-i)g(z) = \frac{z^2 - z + 1}{(z+i)(z-1)^2}]_{z=i} = \frac{-1-i+1}{(2i)(-1-2i+1)} = \frac{1}{4i} \neq 0.$$
   Donc de même $g(z) \sim \frac{1}{4i(z-i)}$ n'a pas de limite en i.
   Vérifions que $-i$ est aussi un pôle d'ordre 1. En effet, en conjuguant la précédente limite on obtient :
   $$\lim_{z\to i}(z+i)g(z) = \frac{i}{4}.$$
2. Déterminer les résidus de g en ces pôles. [1 point en i, 0,5 en -i, 1 point en 1.]
   Méthode 1 :
   On vient déjà de déterminer les résidus aux pôles d'ordre 1 : $i, -i$
   $$Res(f, i) = \lim_{z\to i}(z-i)g(z) = \frac{1}{4i},$$
   $$Res(f, -i) = \lim_{z\to -i}(z+i)g(z) = -\frac{1}{4i}.$$
   Enfin
   $$Res(f, 1) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}[(z-1)^2 g(z)] = \Big[\frac{d}{dz}[1 - \frac{z}{(z^2+1)}\Big]_{z=1} = \Big[\frac{-(z^2+1) + z(2z)}{(z^2+1)^2}\Big]_{z=1} = \frac{-2+2}{4} = 0.$$
   Méthode 2 (astucieuse) :

On remarque que le numérateur est $\frac{(z-1)^2+(z^2+1)}{2}$ donc :

$$g(z) = \frac{1}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2(z-1)^2} = \frac{1}{4i(z-i)} - \frac{1}{4i(z+i)} + \frac{1}{2(z-1)^2},$$

car $\frac{1}{z+i} - \frac{1}{z-i} = \frac{z-i-(z+i)}{(z+i)(z-i)} = \frac{-2i}{(z+i)(z-i)}$.
On peut donc lire les 3 résidus (en z_0 coefficient de $(z-z_0)^{-1}$ dans la décomposition en éléments simples :

$$Res(f,i) = \frac{1}{4i}, Res(f,-i) = -\frac{1}{4i}, Res(f,1) = 0.$$

3. (0,5 point pour dessin et 0,5 point pour justification) Soit $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$ le chemin

$$\gamma(t) = \begin{cases} i(1-e^{it}) & \text{si} \quad t \in [0, 2\pi] \\ -i(1-e^{-it}) & \text{si} \quad t \in [2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

On a tracé γ ci-dessous (avec $z = x + iy$ et les pôles ajoutés pour répondre à la question).
Montrons que γ ne rencontre PAS les pôles de g (ce qui est nécessaire pour que l'indice fasse sens et que la formule des résidus s'applique.)
En effet, i est le centre du cercle de centre i et rayon 1 qui est la première partie de γ, il est à distance 2 de $-i$, donc pas dans le cercle de centre $-i$ et rayon 1 qui constitue la deuxième partie de γ. On raisonne pareil pour $-i$. Enfin, 1 est à distance $\sqrt{2} > 1$ de i et $-i$ et n'est donc pas non plus sur les 2 cercles de centre $i, -i$ et rayon 1 qui forment γ.

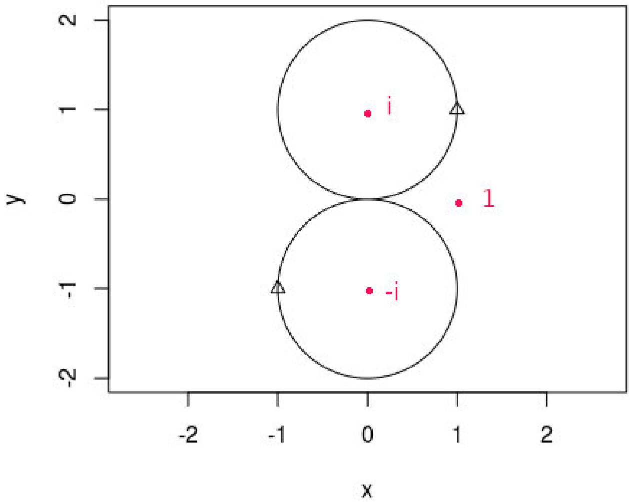
4. L'indice de γ en $-i$ est -1 car le cercle du bas tourne autour de -1 en sens négatif (des aiguilles d'une montre).

5. Calculons par la formule des résidus

$$\int_\gamma g(z)dz = (2i\pi)\left(Ind_\gamma(i)Res(g,i) + Ind_\gamma(-i)Res(g,-i) + Ind_\gamma(1)Res(g,1)\right).$$

Or 1 est à l'extérieur des cercles donc $Ind_\gamma(1) = 0$, et le cercle supérieur est le seul à tourner en sens direct (ou trigonométrique), donc $Ind_\gamma(i) = 1$. On obtient donc :

$$\int_\gamma g(z)dz = (2i\pi)\left(\frac{1}{4i} + (-1)\frac{-1}{4i}\right) = (2i\pi)\frac{1}{2i} = \pi.$$



y
x
2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
i
1
-i