

Contrôle continu Final du vendredi 24 mai 2019

Durée : 2 heures.

Les documents et les calculatrices sont interdits.

On prendra soin à JUSTIFIER les réponses aux exercices.

Vous pouvez utiliser les formules du formulaire joint librement.

Le sujet contient 4 exercices.

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 : [6 points]

En utilisant la transformée de Laplace, trouver la solution de l'équation différentielle :

$$f''(t) - 2f'(t) + f(t) = \sin(t).$$

avec les conditions initiales $f(0) = 1, f'(0) = 0$.

Exercice 2 : [4 points + Bonus : 2 points]

1. Calculer la transformée de Fourier de

$$F(x) = e^{-2|x|}.$$

2. Calculer le produit de convolution de F avec lui-même :

$$(F * F)(x).$$

3. **[Bonus : 2 points]** Calculer la transformée de Fourier de

$$G(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^2}.$$

(Indication : penser à utiliser la formule du cours pour la transformée de Fourier d'un produit de fonctions.)

Exercice 3 : [2 points + Bonus : 2 points]

1. Soit $b > 0$ et $f(x) = e^{x+bx^4}$. Calculer la distribution

$$f\delta'_0.$$

(c'est à dire le produit de f avec la dérivée δ'_0 de la distribution de Dirac en 0).

2. Trouver une primitive de $S = f\delta'_0$.

3. **[Bonus : 2 points]** Soit $a(x) = 1 + x^3$. Trouver les distributions u solutions de l'équation différentielle

$$u' + au = \delta'_0.$$

Exercice 4 : [8 points] Soit la fraction rationnelle :

$$g(z) = \frac{z^2 - z + 1}{(z^2 + 1)(z^2 - 2z + 1)}$$

1. Déterminer les 3 pôles de g avec leur ordre.
2. Déterminer les résidus de g en ces pôles.
3. Soit $\gamma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ le chemin

$$\gamma(t) = \begin{cases} i(1 - e^{it}) & \text{si } t \in [0, 2\pi] \\ -i(1 - e^{-it}) & \text{si } t \in [2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

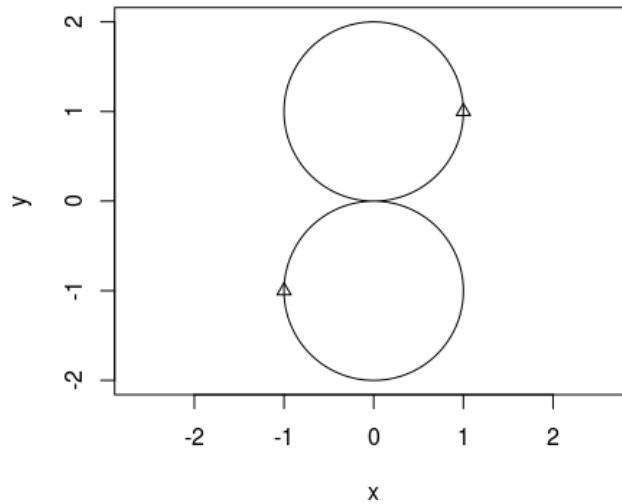
On a tracé γ ci-dessous (avec $z = x + iy$).

Placer les pôles de g sur le dessin de la courbe γ .

Est-ce que γ rencontre les pôles de g ? (justifier)

4. Trouver l'indice de γ en $-i$. Justifier brièvement (sans utiliser de calcul d'intégrale).
5. Calculer

$$\int_{\gamma} g(z) dz.$$



Formulaire pour Math 4

(1) La transformée de Fourier de f est

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x) dx.$$

(2) Formule d'inversion

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(p) e^{ipx} dp.$$

(3) Le produit de convolution est

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

(4) Formule de Plancherel $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(p)|^2 dp.$

(5) Transformée de Laplace de $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C} : \mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt$

Transformées de Fourier usuelles δ_a est la masse de Dirac en a .

	$f(x)$	$\hat{f}(p) = \mathcal{F}[f](p)$
(7)	$g_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0$	$e^{-\frac{p^2\sigma^2}{2}}$
(8)	$\frac{c}{c^2+x^2}, c > 0$	$\pi e^{-c p }$
(9)	$h(sx), s > 0$	$\frac{1}{s} \hat{h}\left(\frac{p}{s}\right)$
(10)	$\frac{1}{s} h\left(\frac{x}{s}\right), s > 0$	$\hat{h}(sp)$
(11)	$h(x-a), a > 0$	$e^{-ipa} \hat{h}(p)$

Transformées de Laplace usuelles

(12)	$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
(13)	$e^{at} t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
(14)	$e^{at} \cos(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2 + \omega^2}$
(15)	$e^{at} \sin(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$
(16)	$e^{ta} h(t), a > 0$	$\mathcal{L}[h](s-a)$

(17) **Décomposition en élément simple** de $Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ avec $q(s) = a(s-s_1)^{m_1} \dots (s-s_k)^{m_k}$ et $\deg(p) < \deg(q)$ de la forme :

$$Y(s) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j},$$

avec pour $1 \leq j \leq m_i$:

$$a_{i,j} = \frac{1}{(m_i-j)!} \left[\frac{d^{(m_i-j)}}{ds^{(m_i-j)}} (Y(s)(s-s_i)^{m_i}) \right]_{s=s_i}.$$

Formules sur les distributions

T, S distributions (dont une à support compact) et f fonction test, g fonction infiniment dérivable, h localement intégrable, h_1, h_2 intégrables et $a, b \in \mathbb{R}$.

$$T'(f) = -T(f') \quad (18)$$

$$(gT)(f) = T(fg) \quad (19)$$

$$T_h(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(x)dx. \quad (20)$$

$$T_{h_1} * T_{h_2} = T_{h_1 * h_2} \quad (21)$$

$$(\delta_a * h) = h_a, \text{ avec } h_a(x) = h(x - a). \quad (22)$$

$$(\delta_a * T) = T_a, \text{ avec } T_a(f) = T(f_{-a}), f_a(x) = f(x - a). \quad (23)$$

$$\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b} \quad (24)$$

$$(S * T)' = S' * T = S * T' \quad (25)$$

Dérivées de fonctions continues par morceaux Soit $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 par morceaux avec des sauts en $a_i \in A$.

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{k=1}^n (f(a_k^+) - f(a_k^-))\delta_{a_k} \quad (26)$$

Transformées de Fourier de distributions δ_a est la masse de Dirac en a .

	T	$\hat{T}(p) = \mathcal{F}[T](p)$
(27)	$\delta_a(x) = \delta(x - a)$	e^{-ipa}
(28)	1	$2\pi\delta_0(p)$

Analyse complexe Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe et un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow U$:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \quad (29)$$

Si f a un pôle d'ordre $k \geq 1$ en $z_0 \notin U$, le résidu de f en z_0 est :

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z - z_0)^k f(z)). \quad (30)$$

Formule des résidus Soit $f : U - S \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction méromorphe avec U ouvert simplement connexe. Par exemple, f holomorphe en dehors d'un ensemble fini de singularités S de U ouvert simplement connexe. Soit γ un lacet de U qui ne rencontre pas S , alors :

$$\int_{\gamma} f(z)dz = (2i\pi) \sum_{z_0 \in S} ind_{\gamma}(z_0) Res(f, z_0). \quad (31)$$

avec $ind_{\gamma}(z_0)$ l'indice de γ en z_0 .