Formulaire pour Math 4

(1) La transformée de Fourier de f est

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx} f(x)dx.$$

(2) Formule d'inversion

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(p) e^{ipx} dp.$$

(3) Le produit de convolution est

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy.$$

(4) Formule de Plancherel $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(p)|^2 dp$.

(5) Transformée de Laplace de $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C} : \mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$

Transformées de Fourier usuelles

	$f(x)$	$\hat{f}(p) = \mathcal{F}[f](p)$
(6)	$g_\sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0$	$e^{-\frac{p^2\sigma^2}{2}}$
(7)	$\frac{c}{c^2+x^2}, c > 0$	$\pi e^{-c\|p\|}$
(8)	$h(sx), s > 0$	$\frac{1}{s}\hat{h}(\frac{p}{s})$
(9)	$\frac{1}{s}h(\frac{x}{s}), s > 0$	$\hat{h}(sp)$
(10)	$h(x-a), a > 0$	$e^{-ipa}\hat{h}(p)$

Transformées de Laplace usuelles

(11)	$f(t)$	$\mathcal{L}[f](s)$
(12)	$e^{at}t^n$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
(13)	$e^{at}\cos(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2}$
(14)	$e^{at}\sin(\omega t), \omega > 0, a \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
(15)	$e^{ta}h(t), a > 0$	$\mathcal{L}[h](s-a)$

(16) **Décomposition en éléments simples complexe de** $Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)}$ avec $deg(p) < deg(q)$ et $q(s) = a(s-s_1)^{m_1} \cdots (s-s_k)^{m_k}$ est de la forme :

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j},$$

avec pour $1 \leqslant j \leqslant m_i$:

$$a_{i,j} = \frac{1}{(m_i - j)!} \left[\frac{d^{(m_i-j)}}{ds^{(m_i-j)}} (Y(s)(s-s_i)^{m_i}) \right]_{s=s_i}.$$

Dans ce cas, $a_{i,1}$ est le résidu de Y en s_i.

(17) **Décomposition réelle** Si $q(s) = a(s-s_1)^{m_1}\cdots(s-s_l)^{m_l}((s-a_1)^2+b_1^2)^{n_1}\cdots((s-a_\lambda)^2+b_\lambda^2)^{n_\lambda}$, pour s_i, a_i, b_i réels, et Y comme avant, il existe des uniques $a_{i,j}, c_{i,j}, d_{i,j}$ avec

$$Y(s) = \frac{p(s)}{q(s)} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{a_{i,j}}{(s-s_i)^j} + \sum_{i=1}^{\lambda}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{c_{i,j}+sd_{i,j}}{(((s-a_i)^2+b_i^2))^j}.$$

Formules sur les distributions

R, S distributions (dont une à support compact) et f fonction test, g fonction infiniment dérivable, h localement intégrable, h_1, h_2 intégrables et $a, b \in \mathbb{R}$.

$$R'(f) = -R(f') \tag{18}$$

$$(gR)(f) = R(fg) \tag{19}$$

$$T_h(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(x)dx. \tag{20}$$

$$T_{h_1} * T_{h_2} = T_{h_1 * h_2} \tag{21}$$

$$(\delta_a * h) = h_a, \text{ avec } h_a(x) = h(x-a). \tag{22}$$

$$(\delta_a * R) = R_a, \text{ avec } R_a(f) = R(f_{-a}), f_a(x) = f(x-a). \tag{23}$$

$$\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b} \tag{24}$$

$$(R * S)' = R * S' = R' * S \tag{25}$$

Dérivées de fonctions continues par morceaux Soit $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 par morceaux avec des sauts en $a_i \in A$.

$$(T_f)' = T_{f'} + \sum_{k=1}^{n}(f(a_k^+) - f(a_k^-))\delta_{a_k} \tag{26}$$

Transformées de Fourier de distributions δ_a est la masse de Dirac en a.

	T	$\hat{T}(p) = \mathcal{F}[T](p)$
(27)	$\delta_a(x) = \delta(x-a)$	e^{-ipa}
(28)	1	$2\pi\delta_0(p)$

Analyse complexe Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphe et un chemin $\gamma : [a,b] \to U$:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt. \tag{29}$$

Si f a un pôle d'ordre $k \geqslant 1$ en $z_0 \notin U$, le résidu de f en z_0 est :

$$Res(f, z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-z_0)^k f(z)\right). \tag{30}$$

Formule des résidus Soit $f : U - S \to \mathbb{C}$ une fonction méromorphe avec U ouvert simplement connexe. Par exemple, f holomorphe en dehors d'un ensemble fini de singularités S de U ouvert simplement connexe. Soit γ un lacet de U qui ne rencontre pas S, alors :

$$\int_\gamma f(z)dz = (2i\pi)\sum_{z_0\in S} ind_\gamma(z_0)Res(f, z_0). \tag{31}$$

avec $ind_\gamma(z_0)$ l'indice de γ en z_0.