Instructions: **Fichier *éditable* à remplir électroniquement.** Enregistrer le fichier, puis le remplir en utilisant par exemple Xodo sous Android, Evince, Gimp ou Okular sous Linux, Preview sous Mac, Adobe Reader sous Windows (éviter la visionneuse pdf de votre navigateur). N'oubliez pas d'**enregistrer** à nouveau le fichier **avec vos réponses** avant de téléverser/rendre votre copie. **Ne pas imprimer, remplir à la main et scanner ou photographier, toute copie illisible ne sera pas corrigée.**

NOM, prénom, numéro d'étudiant :

TEST Sujet

11111111

Math4 – QCM d'entraînement pour le CT1 du 18 mai 2020

Règlement – L'épreuve dure 1 heure. Les questions peuvent avoir une seule ou plusieurs bonnes réponses. Cliquer sur les cases "réponse" pour les cocher/décocher.

Rappel de notation du cours: La distribution T_f associée à une fonction f est

$$T_f(g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx.$$

Pour $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, δ_a est la masse de Dirac en a et la fonction indicatrice de $[a, b[$ est la fonction:

$$1_{[a,b[}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } a \leqslant x < b \\ 0 & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$$

Question 1 [2 points] Soit $b > 0$ et soit la fonction

$$f(x) = e^{x+bx^4}.$$

La distribution produit $T = f\delta_0'$ de la fonction f avec la dérivée d'une masse de Dirac en 0 est la somme de plusieurs termes parmi les termes ci-dessous, cochez les termes dont la somme vaut T:

- ☐ $-\delta_0'$
- ☐ $-4\delta_0'$
- ☐ δ_0'
- ☐ 4
- ☐ 1
- ☐ $-\delta_0$
- ☐ -4
- ☐ δ_0
- ☐ -1
- ☐ $T_{f'}$
- ☐ $4\delta_0'$
- ☐ $4\delta_0$
- ☐ $-T_{f'}$
- ☐ $-T_f$
- ☐ $-4\delta_0$
- ☐ T_f

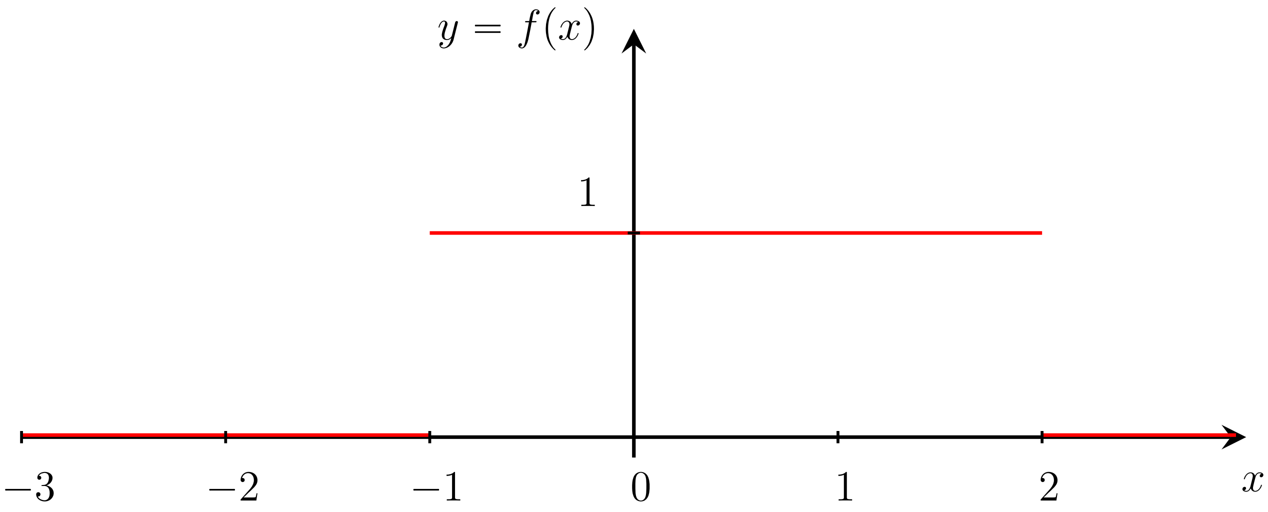
Question 2 [4,5 points] Soient $a(x) = 1 + x^3, A(x) = x + \frac{x^4}{4}$. On peut trouver toutes les distributions u solutions de l'équation différentielle

$$u' + au = \delta_0'$$

comme somme de trois termes parmi ceux ci-dessous, en fonction d'une constante $c \in \mathbb{R}$.**Cocher les 3 cases de ces 3 termes**(chaque terme juste vaut 1.5 points, les termes faux peuvent retirer des points, la note minimale est 0).

☐ $cT_{e^{-a}}$ ☐ $-T_{e^a 1_{[0,+\infty[}}$ ☐ $-\frac{5}{4}\delta_0$ ☐ $-\delta_0'$ ☐ $\frac{5}{4}\delta_0$ ☐ δ_0'
☐ $cT_{e^{-A}}$ ☐ $-\delta_1$ ☐ $T_{e^{-A} 1_{[0,+\infty[}}$ ☐ $-T_{e^{-a} 1_{[0,+\infty[}}$ ☐ cT_{e^a}
☐ $-\delta_0$ ☐ δ_0 ☐ $T_{e^a 1_{[0,+\infty[}}$ ☐ $-T_{e^A 1_{[0,+\infty[}}$ ☐ δ_1
☐ $T_{e^{-a} 1_{[0,+\infty[}}$ ☐ cT_{e^A} ☐ $T_{e^A 1_{[0,+\infty[}}$ ☐ $-T_{e^{-A} 1_{[0,+\infty[}}$

Question 3 [1.5 points] Soit la fonction indicatrice $f(x) = 1_{[-1,2[}(x)$ dont le graphe est tracé ci-dessous:



Quelle est la dérivée au sens des distributions de T_f ?

☐ $(T_f)' = \delta_2 - \delta_{-1}$ ☐ $(T_f)' = \delta_{-2} - \delta_1$ ☐ $(T_f)' = \delta_1 - \delta_{-2}$
☐ $(T_f)' = -\delta_{-2} - \delta_1$ ☐ $(T_f)' = \delta_{-1} + \delta_2$ ☐ $(T_f)' = \delta_{-1} - \delta_2$
☐ $(T_f)' = -\delta_2 - \delta_{-1}$ ☐ $(T_f)' = \delta_1 + \delta_{-2}$

Question 4 [2 points] Soit la fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$:

$$g(z) = \frac{z^2 - z + 1}{(z^2+1)(z^2-2z+1)}$$

Sélectionnez la liste des pôles de g avec pour chaque pôle son ordre.

☐ pôle 1 d'ordre 1
☐ pôle 0 d'ordre 2
☐ pôle -1 d'ordre 1
☐ pôle i d'ordre 2
☐ pôle $-i$ d'ordre 2

☐ pôle 1 d'ordre 3
☐ pôle 0 d'ordre 3
☐ pôle -1 d'ordre 3
☐ pôle i d'ordre 3
☐ pôle $-i$ d'ordre 3

☐ pôle 1 d'ordre 2.
☐ pôle 0 d'ordre 1.
☐ pôle -1 d'ordre 2.
☐ pôle i d'ordre 1.
☐ pôle $-i$ d'ordre 1.

Question 5 [3 points] Soit g la fonction de la variable complexe donnée par

$$g(z) = \frac{z^2 - z + 1}{(z^2+1)(z^2-2z+1)}.$$

Alors le résidu $\mathrm{Res}(g, 1)$ de g en 1 vaut

☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $-\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{4}$ ☐ -1 ☐ $-\frac{1}{2}$ ☐ -3 ☐ -1
☐ 3 ☐ 0 ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 6 [2 points] Soit g la fonction de la variable complexe donnée par

$$g(z) = \frac{z^2 - z + 1}{(z^2+1)(z^2-2z+1)}.$$

Alors le résidu $\mathrm{Res}(g, i)$ de g en i vaut

☐ $\frac{1}{4}$ ☐ $\frac{1}{2i}$ ☐ 0 ☐ $\frac{i}{4}$ ☐ $\frac{1}{4i}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ $-\frac{1}{2}$
☐ $\frac{i}{2}$ ☐ $-\frac{1}{4}$ ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 7 [2 points] Soit $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$ le chemin

$$\gamma(t) = \begin{cases} i(1 - e^{it}) & \text{si} \quad t \in [0, 2\pi] \\ -i(1 - e^{-it}) & \text{si} \quad t \in [2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

Alors l'indice $\mathrm{ind}_\gamma(-i)$ du point $-i$ par rapport au lacet γ vaut

☐ $-i$ ☐ 2 ☐ 1 ☐ 2π ☐ 0 ☐ $\frac{1}{2\pi}$ ☐ -1
☐ $\frac{1}{4\pi}$ ☐ i ☐ -2 ☐ Aucune de ces réponses n'est correcte.

Question 8 [3 points] Soit $\gamma : [0, 4\pi] \to \mathbb{C}$ le chemin

$$\gamma(t) = \begin{cases} i(1 - e^{it}) & \text{si} \quad t \in [0, 2\pi] \\ -i(1 - e^{-it}) & \text{si} \quad t \in [2\pi, 4\pi] \end{cases}$$

Alors, la valeur de l'intégrale

$$\int_\gamma \frac{z^2 - z + 1}{(z^2 + 1)(z^2 - 2z + 1)} dz$$

est

☐ 1 ☐ $-\pi$ ☐ π ☐ 0 ☐ -1 ☐ $2\pi i$ ☐ i ☐ $-2\pi i$ ☐ $-i$