TD6 Distribution

Exercice 1. Déterminer les dérivées première T' et seconde T''

1. $T_{\chi_{[-1,1]}}$
2. $T_{f\chi_{[-1,1]}}$ avec f de classe C^{∞}
3. $T_{E(x)}$
4. $T_{|x|}$
5. $T_{H(x)\sin(x)}$
6. $T_{H(x)\cos(x)}$

Correction exercice 1

1. Première méthode :$T'_{\chi_{[-1,1]}}(\varphi) = -T_{\chi_{[-1,1]}}(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-1}^{1} \varphi'(x)dx = -[\varphi(x)]_{-1}^{1} = -\varphi(1) + \varphi(-1) = \delta_{-1}(\varphi) - \delta_1(\varphi)$

   Donc $T'_{\chi_{[-1,1]}} = \delta_{-1} - \delta_1$

   Seconde méthode si f est C^1 par morceaux avec des sauts en -1 et 1, ce qui est le cas de $f(x) = \chi_{[-1,1]}$
   $$T'_{\chi_{[-1,1]}} = T'_f = T_{f'} + \Delta f(-1)\delta_{-1} + \Delta f(1)\delta_1 = 0 + (1-0)\delta_{-1} + (0-1)\delta_1 = \delta_{-1} - \delta_1$$
   Donc $T''_{\chi_{[-1,1]}} = \delta'_{-1} - \delta'_1$

2. Première méthode
   $$\begin{aligned} T'_{f\chi_{[-1,1]}}(\varphi) &= -T_{f\chi_{[-1,1]}}(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}(x)f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-1}^{1} f(x)\varphi'(x)dx \\ &= -\left([f(x)\varphi(x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f'(x)\varphi(x)dx\right) \\ &= -f(1)\varphi(1) + f(-1)\varphi(-1) + T_{f'\chi_{[-1,1]}}(\varphi) \\ &= -f(1)\delta_1(\varphi) + f(-1)\delta_{-1}(\varphi) + T_{f'\chi_{[-1,1]}}(\varphi) \end{aligned}$$
   Donc $T'_{f\chi_{[-1,1]}} = -f(1)\delta_1 + f(-1)\delta_{-1} + T_{f'\chi_{[-1,1]}}$

   Seconde méthode
   $$\begin{aligned} T'_{f\chi_{[-1,1]}} = T_{(f\chi_{[-1,1]})'} &+ \left(f(-1^+)\chi_{[-1,1]}(-1^+) - f(-1^-)\chi_{[-1,1]}(-1^-)\right)\delta_{-1} \\ &+ \left(f(1^+)\chi_{[-1,1]}(1^+) - f(1^-)\chi_{[-1,1]}(1^-)\right)\delta_1 = T_{f'\chi_{[-1,1]}} + f(-1)\delta_{-1} - f(1)\delta_1 \end{aligned}$$

   $$T''_{f\chi_{[-1,1]}} = -f(1)\delta'_1 + f(-1)\delta'_{-1} + T'_{f'\chi_{[-1,1]}}$$
   D'après la première partie de la question, appliquée à f' au lieu de f
   $$T'_{f'\chi_{[-1,1]}} = -f'(1)\delta_1 + f'(-1)\delta_{-1} + T_{f''\chi_{[-1,1]}}$$
   Alors
   $$T''_{f\chi_{[-1,1]}} = -f(1)\delta'_1 + f(-1)\delta'_{-1} - f'(1)\delta_1 + f'(-1)\delta_{-1} + T_{f''\chi_{[-1,1]}}$$

3. Première méthode
   $$\begin{aligned} T'_{E(x)}(\varphi) = -T_{E(x)}(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} E(x)\varphi'(x)dx &= -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} E(x)\varphi'(x)dx = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_n^{n+1} n\varphi'(x)dx \\ &= -\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\int_n^{n+1} \varphi'(x)dx = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\big(\varphi(n+1) - \varphi(n)\big) \\ &= -\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\varphi(n+1) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\varphi(n) \end{aligned}$$

Dans la première somme on fait le changement d'indice $n' = n+1$ donc

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\varphi(n+1) = \sum_{n'\in\mathbb{Z}} (n'-1)\varphi(n') = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (n-1)\varphi(n)$$

Par conséquent

$$T'_{[x]}(\varphi) = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} (n-1)\varphi(n) + \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\varphi(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-(n-1)+n)\varphi(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n(\varphi)$$

D'où

$$T'_{[x]} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$$

Seconde méthode

$$T'_{E(x)} = T'_{E(x)} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \big(E(n^+) - E(n^-)\big)\delta_n = 0 + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n+1-n)\delta_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_n$$

Et alors

$$T''_{[x]} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta'_n$$

4. Première méthode

$$T'_{|x|}(\varphi) = -T_{|x|}(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} |x|\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{0} |x|\varphi'(x)dx - \int_{0}^{+\infty} |x|\varphi'(x)dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} -x\varphi'(x)dx - \int_{0}^{+\infty} x\varphi'(x)dx = \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)dx - \int_{0}^{+\infty} x\varphi'(x)dx$$

$$= [x\varphi(x)]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx - [x\varphi(x)]_{0}^{+\infty} + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x)dx = -\int_{-\infty}^{0} H(-x)\varphi(x)dx + \int_{0}^{+\infty} H(x)\varphi(x)dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} H(-x)\varphi(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi(x)dx = -T_{H(-x)}(\varphi) + T_{H(x)}(\varphi)$$

Par conséquent $T'_{|x|} = -T_{H(-x)} + T_{H(x)} = T_{H(x)-H(-x)}$

Seconde méthode, on pose $f(x) = |x|$, $T'_{|x|} = T_{f'} + \big(f(0^+) - f(0^-)\big)\delta_0 = T_{f'}$

Si $x \leq 0$ alors $f'(x) = -1 = -H(-x)$ et si $x \geq 0$ alors $f'(x) = 1 = H(x)$

Donc $f'(x) = H(x) - H(-x)$ et alors $T'_{|x|} = -T_{H(-x)} + T_{H(x)} = T_{H(x)-H(-x)}$

Puis

$$T''_{|x|}(\varphi) = T_{H(-x)}(\varphi') - T_{H(x)}(\varphi') = \int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)dx - \int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) - \big(-\varphi(0)\big) = 2\varphi(0)$$

$$= 2\delta_0(\varphi)$$

Par conséquent $T''_{|x|} = 2\delta_0$

Seconde méthode $T'_H = \delta_0$

Donc $T'_H(\varphi) = T_{H'}(\varphi) = \delta_0(\varphi)$ si on pose $H^-(x) = H(-x)$

$$T'_{H^-}(\varphi) = T_{H^{-\prime}}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(H(-x)\big)'\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} -H(-x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} -\delta_0(-x)\varphi(x)dx$$

$$= -\varphi(0) = -\delta_0(\varphi)$$

Ce qui entraine que

$$T'_{H^-} = -\delta_0$$

Puis que $T''_{|x|} = T'_{H^-} - T'_H = 2\delta_0$

5. et 6. Première méthode

$$T'_{H(x)\sin(x)}(\varphi) = -T_{H(x)\sin(x)}(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\sin(x)\,\varphi'(x)dx = -\int_0^{+\infty}\sin(x)\,\varphi'(x)dx$$
$$= -\left([\sin(x)\,\varphi(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\cos(x)\,\varphi(x)dx\right) = \int_0^{+\infty}\cos(x)\,\varphi(x)dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\cos(x)\,\varphi(x)dx = T_{H(x)\cos(x)}(\varphi)$$

Donc $T'_{H(x)\sin(x)} = T_{H(x)\cos(x)}$

Avant de calculer la dérivée seconde de $T_{H(x)\sin(x)}$ on va calculer $T'_{H(x)\cos(x)}$

$$T'_{H(x)\cos(x)}(\varphi) = -T_{H(x)\cos(x)}(\varphi') = -\int_{\mathbb{R}} H(x)\cos(x)\,\varphi'(x)dx = -\int_0^{+\infty}\cos(x)\,\varphi'(x)dx$$
$$= -\left([\cos(x)\,\varphi(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -\sin(x)\,\varphi(x)dx\right) = \varphi(0) - \int_0^{+\infty}\sin(x)\,\varphi(x)dx$$
$$= \delta_0(\varphi) - \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\sin(x)\,\varphi(x)dx = \delta_0(\varphi) - T_{H(x)\sin(x)}(\varphi)$$

Donc $T'_{H(x)\cos(x)} = \delta_0 - T_{H(x)\sin(x)}$

On en déduit que $T''_{H(x)\sin(x)} = \left(T'_{H(x)\sin(x)}\right)' = \left(T_{H(x)\cos(x)}\right)' = T'_{H(x)\cos(x)} = \delta_0 - T_{H(x)\sin(x)}$.

Et que $T''_{H(x)\cos(x)} = \left(T'_{H(x)\cos(x)}\right)' = \left(\delta_0 - T_{H(x)\sin(x)}\right)' = \delta'_0 - T'_{H(x)\sin(x)} = \delta'_0 - T_{H(x)\cos(x)}$

Seconde méthode, on pose $f(x) = H(x)\sin(x)$ et $g(x) = H(x)\cos(x)$

$$T'_f = T_{f'} + (f(0^+) - f(0^-)\delta_0 = T_{f'} = T_g$$

Autrement dit

$$T'_{H(x)\sin(x)} = T_{H(x)\cos(x)}$$

$T'_g = T_{g'} + (g(0^+) - g(0^-)\delta_0 = T_{g'} + (H(0^+)\cos(0^+) - H(0^-)\cos(0^-))\delta_0 = T_{-f} + \delta_0 = -T_f + \delta_0$

Autrement dit

$$T_{H(x)\cos(x)} = \delta_0 - T_{H(x)\sin(x)}$$

Et que $T''_{H(x)\cos(x)} = \delta'_0 - T'_{H(x)\sin(x)} = \delta'_0 - T_{H(x)\cos(x)}$

Donc $T''_{H(x)\cos(x)}(\varphi) = -\varphi'(0) - T_{H(x)\cos(x)}(\varphi) = \delta'_0(\varphi) - T_{H(x)\cos(x)}(\varphi)$ et

$$T''_{H(x)\cos(x)} = \delta'_0 - T_{H(x)\cos(x)}$$

Exercice 2. Calculer les primitives des distributions suivantes

1. δ'_0
2. $T_{sgn(x)}$ avec $sgn(x)$, le signe de x.
3. $(1+x)\delta_a$, $a \in \mathbb{R}$.
4. $(1+x)^2\delta'_0$.
5. Le peine de Dirac$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(x-kT)$.
6. $T_{1/\sqrt{|x|}}$.
7. $(1+x)\delta''_0$.

Correction exercice 2

1.

$$\delta'_0(\varphi) = T'_{\delta_0}(\varphi) = -T_{\delta_0}(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'(x)\delta_0(x)dx = -\varphi'(0)$$

On cherche une primitive T_f telle que :

$$T'_f(\varphi) = -T_f(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'(x)f(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'(x)\delta_0(x)dx$$

$f = \delta_0 + c, c \in \mathbb{R}$ convient évidemment.

2. Première méthode

$$T_{sgn(x)}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) sgn(x) dx = -\int_{-\infty}^{0} \varphi(x) dx + \int_{0}^{+\infty} \varphi(x) dx$$

$$= -[x\varphi(x)]_0^{+\infty} + \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x) dx + [x\varphi(x)]_0^{+\infty} - \int_{0}^{+\infty} x\varphi'(x) dx$$

$$= +\int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x) dx - \int_{0}^{+\infty} x\varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xH(-x)\varphi(x) dx - \int_{-\infty}^{+\infty} xH(x)\varphi(x) dx$$

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\big(-xH(-x) + xH(x)\big) dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)|x| dx$$

On cherche une primitive T_f telle que :

$$T_f'(\varphi) = -T_f(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) f(x) dx$$

$f(x) = -xH(-x) + xH(x) + c = |x| + c, c \in \mathbb{R}$ convient.

Seconde méthode d'après l'exercice 1.

$$T_{|x|}' = -T_{H(-x)} + T_{H(x)} = T_{H(x)-H(-x)}$$

Or

$$T_{sgn(x)} = T_{H(x)-H(-x)}$$

Donc

$T_{|x|+c}, c \in \mathbb{R}$ convient.

3.

$$(1+x)\delta_a(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} (1+x)\delta_a(x)\varphi(x) dx = (1+a)\varphi(a) = (1+a)\delta_a(\varphi) = (1+a)T_{H(x-a)}'(\varphi)$$

$$= T_{(1+a)H(x-a)}'(\varphi)$$

Car $fT(\varphi) = T(f\varphi)$ est appliqué à $f(x) = 1 + x$ et $T = \delta_a$

et $T_{H(x-a)}'(\varphi) = -T_{H(x-a)}(\varphi') = -\int_a^{+\infty} \varphi'(x) dx = -[\varphi(x)]_a^{+\infty} = \varphi(a)$

Résultats à savoir.

$$(1+x)\delta_a = T_{(1+a)H(x-a)}'$$

Les primitives de $(1+x)\delta_a$ sont $T_{(1+a)H(x-a)+c}, c \in \mathbb{R}$

4. Première méthode :

On pose $f(x) = (1+x)^2$ alors $f'(x) = 2(x+1)$

$$(1+x)^2\delta_0'(\varphi) = f\delta_0'(\varphi) = \delta_0'(f\varphi) = -(f'\varphi + f\varphi')(0) = -f'(0)\varphi(0) - f(0)\varphi'(0)$$

$$= -2\varphi(0) - \varphi'(0) = -2T_H(\varphi) + \delta_0(\varphi)$$

$$(1+x)^2\delta_0' = -2T_H + \delta_0 + c, c \in \mathbb{R}$$

Seconde méthode $((1+x)^2\delta_0)' = (1+x)^2\delta_0' + 2(x+1)\delta_0$

Donc $(1+x)^2\delta_0' = ((1+x)^2\delta_0)' - 2(x+1)\delta_0 = ((1+0)^2\delta_0)' - 2(0+1)\delta_0 = \delta_0' - 2T_H'$

Même conclusion

5. $T \in \mathbb{R}$

$$T_{peigne\ de\ Dirac\ T}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_0(x - kT)\, dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\delta_0(x-kT) dx$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \varphi(kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T_{H(x-kT)}'(\varphi) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} T_{H(x-kT)}(\varphi)\right)'$$

Une primitive du peigne de Dirac est $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} T_{H(x-kT)}$

6.

$$T_{\frac{1}{\sqrt{|x|}}}(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\frac{1}{\sqrt{|x|}}dx=\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\frac{1}{\sqrt{-x}}dx+\int_{0}^{+\infty}\varphi(x)\frac{1}{\sqrt{x}}dx$$
$$=\left[-2\sqrt{-x}\varphi(x)\right]_{-\infty}^{0}-\int_{-\infty}^{0}(-2)\sqrt{-x}\varphi'(x)dx+\left[2\sqrt{x}\varphi(x)\right]_{0}^{+\infty}-\int_{0}^{+\infty}2\sqrt{x}\varphi'(x)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{0}2\sqrt{-x}\varphi'(x)dx-\int_{0}^{+\infty}2\sqrt{x}\varphi'(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}2H(-x)\sqrt{-x}\varphi'(x)dx-\int_{-\infty}^{+\infty}2H(x)\sqrt{x}\varphi'(x)dx$$
$$=-\int_{-\infty}^{+\infty}-2\big(H(-x)\sqrt{-x}-H(x)\sqrt{x}\big)\varphi'(x)dx$$
$$=2\int_{-\infty}^{+\infty}\big(H(-x)\sqrt{-x}-H(x)\sqrt{x}\big)\varphi'(x)dx=T'_{2(H(-x)\sqrt{-x}-H(x)\sqrt{x})}$$

Donc $H(x)\sqrt{x}-H(-x)\sqrt{-x}=H(|x|)\sqrt{x^2}$ convient.

7. Première méthode, on pose $f(x)=1+x$

$$(1+x)\delta_0''(\varphi)=\delta_0''(f\varphi)=(-1)^2(f\varphi)''(0)=(f''\varphi+2f'\varphi'+f\varphi'')(0)=(2f'\varphi'+f\varphi'')(0)$$
$$=2f'(0)\varphi'(0)+f(0)\varphi''(0)=2\varphi'(0)+\varphi''(0))=-2\delta_0'(\varphi)+\delta_0''(\varphi)$$

Donc $(1+x)\delta_0''=-2\delta_0'+\delta_0''$

Donc les primitives de $(1+x)\delta_0''$ sont $-2\delta_0+\delta_0'+c, c\in\mathbb{R}$.

Seconde méthode $\big((1+x)\delta_0\big)''=(1+x)''\delta_0+2(1+x)'\delta_0'+(1+x)\delta_0''=2\delta_0'+(1+x)\delta_0''$

Donc $(1+x)\delta_0''=\big((1+x)\delta_0\big)''-2\delta_0'=\big((1+0)\delta_0\big)''-2\delta_0'=\delta_0''-2\delta_0'$

Même réponse.

Exercice 3. Résoudre l'équation $u'+au=T$ pour :

1. $a(x)=x$ et $T=\delta_0$
2. $a(x)=1$ et $T=H$
3. $a(x)=1-x$ et $T=\delta_0'$

Correction exercice 3

On rappelle que la dérivée d'une distribution est donnée par $T'(\varphi)=-T(\varphi')$

1. $u'(x)+xu(x)=\delta_0(x)$

   La solution générale de $u'(x)+xu(x)=0$ est $u(x)=\lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$, avec $\lambda\in\mathbb{R}$, il reste à trouver une distribution qui soit une solution particulière sous la forme : $T_{u_P}=T_{\lambda(x)e^{-\frac{x^2}{2}}}$

   Comme pour les fonctions : $T_\lambda'=T_{\lambda'}=T_{e^{\frac{x^2}{2}}\delta_0(x)}$

$$T_{e^{\frac{x^2}{2}}\delta_0(x)}(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^{\frac{x^2}{2}}\delta_0(x)dx=e^0\varphi(0)=\varphi(0)=T_H'(\varphi)$$

   Donc $T_\lambda'=T_H'$ et alors $\lambda(x)=H(x)$ et $T_{u_P}=T_{\lambda(x)e^{-\frac{x^2}{2}}}=T_{H(x)e^{-\frac{x^2}{2}}}$

   La solution générale est : $u(x)=\lambda e^{-\frac{x^2}{2}}+H(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$

2. Il faut résoudre l'équation homogène, $u(x)=\lambda e^{-x}$. Ensuite il faut trouver une distribution qui soit solution de l'équation avec second membre de la forme : $T_{u_P}=T_{\lambda(x)e^{-x}}$

   Comme pour les fonctions : $T_\lambda'=T_{\lambda'}=T_{e^xH(x)}$

$$T_{e^xH(x)}(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)e^xH(x)dx=\int_{0}^{+\infty}\varphi(x)e^xdx=[e^x\varphi(x)]_0^{+\infty}-\int_{0}^{+\infty}\varphi'(x)e^xdx$$
$$=-\varphi(0)-\int_{0}^{+\infty}\varphi'(x)e^xdx=-T_H'-\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi'(x)H(x)e^xdx=-T_H'(\varphi)-T_{H(x)e^x}(\varphi')$$
$$=-T_H'(\varphi)+T_{H(x)e^x}'(\varphi)=T_{-H(x)+H(x)e^x}'(\varphi)$$

Donc $T'_\lambda = T'_{-H(x)+H(x)e^x}$ et alors $\lambda(x) = -H(x) + H(x)e^x = H(x)(e^x - 1)$ et $T_{u_P} = T_{\lambda(x)e^{-x}} = T_{H(x)(1-e^{-x})}$

La solution générale est : $T_u = T_{\lambda e^{-x}} + T_{H(x)(1-e^{-x})}$

Ou encore $u(x) = \lambda e^{-x} + H(x)(1 - e^{-x}) = \big(\lambda - H(x)\big)e^{-x} + H(x)$

3. $u'(x) + (1 - x)u(x) = \delta'_0(x)$

La solution générale de $u'(x) + (1 - x)u(x) = 0$ est $u(x) = \lambda e^{\frac{x^2}{2}-x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, il reste à trouver une distribution qui soit une solution particulière sous la forme : $T_{u_P} = T_{\lambda(x)e^{\frac{x^2}{2}-x}}$

Comme pour les fonctions : $T'_\lambda = T_{\lambda'} = T_{e^{\frac{x^2}{2}-x}\delta'_0(x)}$

$$T_{e^{\frac{x^2}{2}-x}\delta'_0(x)}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)e^{\frac{x^2}{2}-x}\delta'_0(x)dx = -\left(e^{\frac{x^2}{2}-x}\varphi(x)\right)'(0)$$
$$= -\left((1-x)e^{\frac{x^2}{2}-x}\varphi'(x) + e^{\frac{x^2}{2}-x}\varphi(x)\right)(0) = -\big(-\varphi'(0) + \varphi(0)\big)$$
$$= \varphi'(0) - \varphi(0) = -\delta'_0(\varphi) + \delta_0(\varphi) = -\delta'_0(\varphi) + T'_H(\varphi)$$
$$\lambda(x) = H(x) - \delta_0(x)$$

La solution générale est : $u(x) = \lambda e^{\frac{x^2}{2}-x} + \big(H(x) - \delta_0(x)\big)e^{\frac{x^2}{2}-x}$

Exercice 4. Déterminer les limites (au sens des distributions)

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{n\chi_{[-1,1](nx)}}$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\delta_{-\frac{1}{n}} - \delta_{\frac{1}{n}}\right)$
3. $\lim\limits_{a\to0} T_{e^{ax}}$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{e^{-nx^2}}$
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{\sqrt{n}e^{-nx^2}}$

Correction exercice 4

1. $T_{n\chi_{[-1,1](nx)}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} n\chi_{[-1,1]}(nx)\varphi(x)dx$

On fait le changement de variable $y = nx$, donc $x = \frac{y}{n}$ et $dx = \frac{dy}{n}$. Les bornes ne changent pas

$$T_{n\chi_{[-1,1](nx)}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} n\chi_{[-1,1]}(y)\varphi(y)\frac{dy}{n} = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}(y)\varphi\left(\frac{y}{n}\right)dy = \int_{-1}^{1} \varphi\left(\frac{y}{n}\right)dy$$

Comme φ est à support compact, on peut appliquer le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty} T_{n\chi_{[-1,1](nx)}}(\varphi) = \lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1} \varphi\left(\frac{y}{n}\right)dy = \int_{-1}^{1}\lim_{n\to+\infty}\varphi\left(\frac{y}{n}\right)dy = \int_{-1}^{1}\varphi(0)dy = 2\varphi(0) = 2\delta_0(\varphi)$$

Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} T_{n\chi_{[-1,1](nx)}} = 2\delta_0$$

2.

$$n\left(\delta_{-\frac{1}{n}} - \delta_{\frac{1}{n}}\right)(\varphi) = n\left(\delta_{-\frac{1}{n}}(\varphi) - \delta_{\frac{1}{n}}(\varphi)\right) = n\left(\varphi\left(-\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

φ vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis entre $-\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}$ donc il existe $c_n \in \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$ tel que : $\varphi\left(-\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(\frac{1}{n}\right) = \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)\varphi'(c_n) = -\frac{2}{n}\varphi'(c_n)$

Alors $n\left(\delta_{-\frac{1}{n}} - \delta_{\frac{1}{n}}\right)(\varphi) = -2\varphi'(c_n)$

Lorsque $n \to +\infty$, $c_n \to 0$, par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\delta_{-\frac{1}{n}}-\delta_{\frac{1}{n}}\right)(\varphi)=\lim_{n\to+\infty} -2\varphi'(c_n)=-2\varphi'(0)=2\delta_0'(\varphi)$$

Donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\delta_{-\frac{1}{n}}-\delta_{\frac{1}{n}}\right)=2\delta_0'$

3.

$$T_{e^{ax}}(\varphi)=\int_{\mathbb{R}} e^{ax}\varphi(x)dx$$

φ est à support compact donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée

$$\lim_{a\to 0} T_{e^{ax}}(\varphi)=\int_{\mathbb{R}}\lim_{a\to 0} e^{ax}\varphi(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}}\varphi(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\chi_{\mathbb{R}}(x)\varphi(x)dx=T_{\chi_{\mathbb{R}}}(\varphi)$$

On a donc $\lim_{a\to 0} T_{e^{ax}}=T_{\chi_{\mathbb{R}}}$

4.

$$T_{e^{-nx^2}}(\varphi)=\int_{\mathbb{R}} e^{-n^2x}\varphi(x)dx$$

φ est à support compact donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée

$$\lim_{n\to+\infty} T_{e^{-nx^2}}(\varphi)=\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to+\infty} e^{-nx^2}\,\varphi(x)dx=\int_{\mathbb{R}} 0\times\varphi(x)dx=0$$

Car $\lim_{n\to+\infty} e^{-nx^2}=\begin{cases}1 & \text{si } x=0\\ 0 & \text{si } x\neq 0\end{cases}$

$$\lim_{n\to+\infty} T_{e^{-nx^2}}=0$$

5.

$$T_{\sqrt{n}e^{-n^2x}}(\varphi)=\int_{\mathbb{R}}\sqrt{n}e^{-nx^2}\varphi(x)dx=\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)dy$$

On peut appliquer le théorème de la convergence dominée car φ est à support compact

$$\lim_{n\to+\infty} T_{\sqrt{n}e^{-nx^2}}(\varphi)=\int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to+\infty} e^{-y^2}\varphi\left(\frac{y}{\sqrt{n}}\right)dy=\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\varphi(0)dy=\varphi(0)\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy=\varphi(0)\sqrt{2\pi}$$
$$=\sqrt{2\pi}\delta_0(\varphi)$$

$$\lim_{n\to+\infty} T_{\sqrt{n}e^{-nx^2}}=\sqrt{2\pi}\delta_0$$

Exercice 5. Soit δ_a la distribution de Dirac en a, $\delta_a(\varphi)=\varphi(a)$. Déterminer

1. $(x-a)\delta_a$.
2. $(x-a)\delta_a'$.
3. $(x-a)^2\delta_a'$.

Correction exercice 5

1. $(x-a)\delta_a(\varphi)=\delta_a\big((x-a)\varphi\big)=(a-a)\varphi(a)=0$

Autrement dit : $(x-a)\delta_a=0$

2. $f\delta_a'(\varphi)=\delta_a'(f\varphi)=-\delta_a((f\varphi)')=-f'(a)\varphi(a)-f(a)\varphi'(a)$

Donc $(x-a)\delta_a'(\varphi)=\delta_a'\big((x-a)\varphi\big)=-\varphi(a)=-\delta_a(\varphi)$

Autrement dit $(x-a)\delta_a'=-\delta_a$

3. $(x-a)^2\delta_a'(\varphi)=\delta_a'((x-a)^2\varphi)=-2(a-a)\varphi(a)-(a-a)^2\varphi'(a)=0$

Autrement dit $(x-a)^2\delta_a'=0$

Exercice 6. Déterminer

1. $\left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)T_{e^{\lambda x}H(x)}$.
2. $\left(\frac{d^2}{dx^2}+\omega^2\right)T_{\frac{\sin(\omega x)}{\omega}H(x)}$

Correction exercice 6

1.

$$\left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)T_{e^{\lambda x}H(x)}(\varphi)=T'_{e^{\lambda x}H(x)}(\varphi)-\lambda T_{e^{\lambda x}H(x)}(\varphi)=-T_{e^{\lambda x}H(x)}(\varphi')-\lambda T_{e^{\lambda x}H(x)}(\varphi)$$
$$=-\int_{\mathbb{R}}e^{\lambda x}H(x)\varphi'(x)dx-\lambda\int_{\mathbb{R}}e^{\lambda x}H(x)\varphi(x)dx$$
$$=-\int_0^{+\infty}e^{\lambda x}\varphi'(x)dx-\lambda\int_0^{+\infty}e^{\lambda x}\varphi(x)dx$$
$$=-\left[e^{\lambda x}\varphi(x)\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\lambda e^{\lambda x}\varphi(x)dx-\lambda\int_0^{+\infty}e^{\lambda x}\varphi(x)dx=\varphi(0)=\delta_0(\varphi)$$

Donc $\left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)T_{e^{\lambda x}H(x)}=\delta_0$

2.

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\omega^2\right)T_{\frac{\sin(\omega x)}{\omega}H(x)}(\varphi)=T''_{\frac{\sin(\omega x)}{\omega}H(x)}(\varphi)+\omega^2T_{\frac{\sin(\omega x)}{\omega}H(x)}(\varphi)$$
$$=-T'_{\frac{\sin(\omega x)}{\omega}H(x)}(\varphi')+\omega^2T_{\frac{\sin(\omega x)}{\omega}H(x)}(\varphi)=T_{\frac{\sin(\omega x)}{\omega}H(x)}(\varphi'')+\omega^2T_{\frac{\sin(\omega x)}{\omega}H(x)}(\varphi)$$
$$=\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin(\omega x)}{\omega}H(x)\varphi''(x)dx+\omega^2\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin(\omega x)}{\omega}H(x)\varphi(x)dx$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\omega x)}{\omega}\varphi''(x)dx+\omega\int_0^{+\infty}\sin(\omega x)\,\varphi(x)dx$$
$$=\left[\frac{\sin(\omega x)}{\omega}\varphi'(x)\right]_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\cos(\omega x)\,\varphi'(x)dx+\omega\int_0^{+\infty}\sin(\omega x)\,\varphi(x)dx$$
$$=-\int_0^{+\infty}\cos(\omega x)\,\varphi'(x)dx+\omega\int_0^{+\infty}\sin(\omega x)\,\varphi(x)dx$$
$$=-[\cos(\omega x)\,\varphi(x)]_0^{+\infty}-\omega\int_0^{+\infty}\sin(\omega x)\,\varphi(x)dx+\omega\int_0^{+\infty}\sin(\omega x)\,\varphi(x)dx$$
$$=\varphi(0)=\delta_0(\varphi)$$

Donc $\left(\frac{d^2}{dx^2}+\omega^2\right)T_{\frac{\sin(\omega x)}{\omega}H(x)}=\delta_0$

Exercice 7. Déterminer les produits de convolution des distributions suivantes :

1. $\delta_0\star\chi_{[0,1]}$.
2. $\delta_0'\star T_{H(x)\sin(x)}$.
3. $\delta_a\star\delta_b$.
4. $\delta_0'*H$.
5. $Peigne\ de\ Dirac4*T_{\chi_{[-1,1]}}$

Correction exercice 7

1. $\delta_0\star\chi_{[0,1]}(\varphi)=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\delta_0(t)\chi_{[0,1]}(x-t)dt\right)\varphi(x)dx$

   Comme $\int_{\mathbb{R}}\delta_0(t)\chi_{[0,1]}(x-t)dt=\delta_0\left(\chi_{[0,1]}(x-t)\right)=\chi_{[0,1]}(x)$

$$\delta_0\star\chi_{[0,1]}(\varphi)=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\delta_0(t)\chi_{[0,1]}(x)dt\right)\varphi(x)dx=\int_{\mathbb{R}}\chi_{[0,1]}(x)\left(\int_{\mathbb{R}}\delta_0(t)dt\right)\varphi(x)dx$$
$$=\int_{\mathbb{R}}\chi_{[0,1]}(x)\varphi(x)dx=T_{\chi_{[0,1]}}(\varphi)$$

   Donc $\delta_0\star\chi_{[0,1]}=T_{\chi_{[0,1]}}$

2.

$$\delta_0' \star T_{H(x)\sin(x)}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \delta_0'(t) H(x-t)\sin(x-t)\,dt \right) \varphi(x)dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \delta_0'(t) H(x-t)\sin(x-t)\,\varphi(x)dx \right) dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \delta_0'(t) \left(\int_{\mathbb{R}} H(x-t)\sin(x-t)\,\varphi(x)dx \right) dt$$

Comme $\int_{\mathbb{R}} \delta_0'(t) f(t)dt = \delta_0'(f) = -f'(0)$

$$-\left(\int_{\mathbb{R}} H(x-t)\sin(x-t)\,\varphi(x)dx \right)'(0) = -\left(\int_{\mathbb{R}} H(y)\sin(y)\,\varphi(y+t)dy \right)'(0)$$
$$= -\left(\int_{\mathbb{R}} H(y)\sin(y)\,\varphi'(y+t)dy \right)(0) = -\left(\int_{\mathbb{R}} H(y)\sin(y)\,\varphi'(y)dy \right)$$
$$= T'_{H(y)\sin(y)}(\varphi)$$

Donc $\delta_0' \star T_{H(x)\sin(x)} = T'_{H(y)\sin(y)}$

3.

$$\delta_a \star \delta_b(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \delta_a(t)\delta_b(x-t)dt \right) \varphi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \delta_a(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \delta_b(x-t)\varphi(x)dx \right) dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \delta_a(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \delta_b(x)\varphi(x+t)dx \right) dt$$

Comme $\int_{\mathbb{R}} \delta_b(x)\varphi(x+t)dx = \delta_b\big(\varphi(x+t)\big) = \varphi(x+b)$

$$\delta_a \star \delta_b(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \delta_a(t) \left(\int_{\mathbb{R}} \delta_b(x)\varphi(t+b)dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}} \delta_a(t)\varphi(t+b) \left(\int_{\mathbb{R}} \delta_b(x)dx \right) dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \delta_a(t)\varphi(b+t)dt = \int_{\mathbb{R}} \delta_a(t)\varphi(b+a)dt = \varphi(b+a)\int_{\mathbb{R}} \delta_a(t)dt = \varphi(b+a)$$
$$= \delta_{a+b}(\varphi)$$

Donc $\delta_a \star \delta_b = \delta_{a+b}$

4. $\delta_0' * H(\varphi) = T_H'(\varphi) = \delta_0(\varphi)$
   Donc $\delta_0' * H = \delta_0$

5.

$$Peigne\ de\ Dirac4 * T_{\chi_{[-1,1]}}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_0(y-4k) \right) T_{\chi_{[-1,1]}}(z)\varphi(y+z)dz \right) dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_0(y-4k) \left(\int_{-1}^{1} \varphi(y+z)dz \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_0(y-4k) \left(\int_{y-1}^{y+1} \varphi(t)dt \right) dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta_0(y-4k) \left(\int_{y-1}^{y+1} \varphi(t)dt \right) dy$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_0(y-4k) \left(\int_{y-1}^{y+1} \varphi(t)dt \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{4k-1}^{4k+1} \varphi(t)dt \right)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[4k-1,4k+1]}\varphi(t)dt \right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(T_{H(x-4k+1)}(\varphi) - T_{H(x-4k-1)}(\varphi) \right)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T_{H(x-(4k-1))}(\varphi) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T_{H(x-(4k+1))}(\varphi)$$

Car $T_{\chi_{[a,b]}}(\varphi) = T_{H(x-a)}(\varphi) - T_{H(x-b)}(\varphi)$

Puis on remarque que

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} (-1)^l T_{H(x-(2l-1))}(\varphi) = \sum_{\substack{l=-\infty \\ l=2k}}^{+\infty} (-1)^{2k} T_{H(x-(4k-1))}(\varphi) + \sum_{\substack{l=-\infty \\ l=2k+1}}^{+\infty} (-1)^{2k+1} T_{H(x-(2(2k+1)-1))}(\varphi)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T_{H(x-(4k-1))}(\varphi) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T_{H(x-(4k+1))}(\varphi)$$

Finalement

$$Peigne\ de\ Dirac4 * T_{\chi_{[-1,1]}} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (-1)^l T_{H(x-(2l-1))}$$