Fonction de la variable complexe II

Exercice 1.

Trouver les résidus, en leurs pôles, des fonctions données

a. $f(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$

b. $g(z) = \frac{1}{z(z+2)^3}$

c. $h(z) = \frac{ze^{2019z}}{(z-3)^2}$

d. $k(z) = \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$

Correction exercice 1

a. Il y a 3 pôles simples 2, i et $-i$

$$res(2) = \lim_{z\to 2}(z-2)\frac{z^2}{(z-2)(z-i)(z+i)} = \lim_{z\to 2}\frac{z^2}{z^2+1} = \frac{4}{5}$$

$$res(i) = \lim_{z\to i}(z-i)\frac{z^2}{(z-2)(z-i)(z+i)}\lim_{z\to i}\frac{z^2}{(z-2)(z+i)} = -\frac{1}{(i-2)2i} = -\frac{1}{-2-4i}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{1+2i} = \frac{1}{2}\frac{1-2i}{5} = \frac{1-2i}{10}$$

$$res(-i) = \overline{\frac{1-2i}{10}} = \frac{1+2i}{10}$$

b. Il y a deux pôles 0 et -2

$$res(0) = \lim_{z\to 0} z\frac{1}{z(z+2)^3} = \frac{1}{8}$$

-2 est un pôle d’ordre 3.

On pose $f(z) = \frac{1}{z(z+2)^3}$,

$$\left((z+2)^3\frac{1}{z(z+2)^3}\right)' = \left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}$$

Donc

$$\left((z+2)^3\frac{1}{z(z+2)^3}\right)'' = \frac{2}{z^3}$$

Donc

$$res(-2) = \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{(-2)^3}\right) = -\frac{1}{8}$$

c.

$$h(z) = \frac{ze^{2019z}}{(z-3)^3}$$

3 est un pôle d’ordre 2

$$(z-3)^2h(z) = ze^{2019z}$$

$$\left((z-3)^2h(z)\right)' = (ze^{2019z})' = e^{2019z} + 2019ze^{2019} = (1+2019z)e^{2019z}$$

$$res(3) = \frac{1}{1!}(1+2019\times 3)e^{2019\times 3}$$

d. k a un pôle double -1 et 2 pôles simples $2i$ et $-2i$.

$$(z+1)^2k(z) = \frac{z^2-2z}{z^2+4}$$

Donc

$$\left((z+1)^2k(z)\right)' = \left(\frac{z^2-2z}{z^2+4}\right)' = \frac{(2z-2)(z^2+4)-(z^2-2z)2z}{(z^2+4)^2}$$
$$= \frac{2z^3+8z-2z^2-8-2z^3+4z^2}{(z^2+4)^2} = \frac{2z^2+8z-8}{(z^2+4)^2}$$

Donc

$$res(-1) = \frac{1}{1!}\frac{2(-1)^2-8-8}{((-1)^2+4)^2} = -\frac{14}{25}$$
$$(z-2i)k(z) = \frac{z^2-2z}{(z+1)(z+2i)}$$

Donc

$$res(2i) = \frac{(2i)^2-2(2i)}{(2i+1)^2(2i+2i)} = \frac{-4-4i}{4i(1+4i-4)} = \frac{i(1+i)}{-3+4i} = \frac{(-1+i)(-3-4i)}{25} = \frac{3+4+4i-3i}{5}$$
$$= \frac{7+i}{25}$$
$$res(-2i) = \overline{\frac{7+i}{25}} = \frac{7-i}{25}$$

Exercice 2. Par le théorème des résidus, calculer les intégrales des fonctions de l'exercice 1 le long des lacets données (le cercle γ est cetré en O et parcouru dans le sens direct).

a. $\int_\gamma f(z)dz$ avec γ le cercle de rayon $3/2$ puis de rayon 10.
b. $\int_\gamma g(z)dz$ avec γ le cercle de rayon 1 puis de rayon 3.
c. $\int_\gamma h(z)dz$ avec γ le cercle de rayon 12 puis de rayon 2019.
d. $\int_\gamma k(z)dz$ avec γ le cercle de rayon $3/2$ puis de rayon 5.

Correction exercice 2

a. i et $-i$ sont à l'intérieur du cercle de rayon $\frac{3}{2}$

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi\left(res(-i)+res(i)\right) = 2i\pi\left(\frac{1-2i}{10}+\frac{1+2i}{10}\right) = \frac{2i\pi}{5}$$

i, $-i$ et 2 sont à l'intérieur du cercle de rayon 10.

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi(res(-i)+res(i)+res(2)) = 2i\pi\left(\frac{1-2i}{10}+\frac{1+2i}{10}+\frac{4}{5}\right) = 2i\pi$$

b. 0 est à l'intérieur du cercle de rayon 1

$$\int_\gamma g(z)dz = 2i\pi res(0) = \frac{i\pi}{4}$$

0 et -2 sont à l'intérieur du cercle de rayon 3

$$\int_\gamma g(z)dz = 2i\pi\left(res(0)+res(-2)\right) = 2i\pi\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\right) = 0$$

c. 3 est dans le cercle de rayon 12 et dans le cercle de rayon 12 2019

$$\int_\gamma h(z)dz = 2i\pi res(3) = 2i\pi(1+2019\times 3)e^{2019\times 3}$$

d. -1 est à l'intérieur du cercle de rayon 1

$$\int_\gamma k(z)dz = 2i\pi res(-1) = 2i\pi\left(-\frac{14}{25}\right) = -\frac{28i\pi}{25}$$

$-1, 2i$ et $-2i$ sont à l'intérieur du cercle de rayon 5

$$\int_\gamma k(z)dz = 2i\pi\big(res(-1)+res(2i)+res(-2i)\big) = 2i\pi\left(-\frac{14}{25}+\frac{7+i}{25}+\frac{7-i}{25}\right) = 0$$

Exercice 3. En utilisant le théorème des résidus et en choisissant soigneusement le contour montrer que :

A partir d'un demi-cercle de centre l'origine et de diamètre l'axe des réels

a. $\int_\gamma \frac{1}{1+x^2}dx = \pi$

b. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$

c. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx}}{1+x^2}dx = \pi e^{-p}$

En utilisant un anneau centré en 0 et possédant une ouverture le long de l'axe des réels positifs.

d. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}dx = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$

e. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)}dx = \frac{\pi}{\sin(\pi(1-a))} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$ pour tout $a \in]0,1[$

Correction exercice 3

a.

Soit $R > 1$ et soit γ le lacet défini par

$$\gamma : [0,3] \to \mathbb{C}$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} Re^{i\pi t} & \text{si} \quad t \in [0,1] \\ R(t-2) & \text{si} \quad t \in [1,3] \end{cases}$$

Il s'agit du demi-cercle supérieur de rayon R et de centre O et du segment de droite entre les points $(-R,0)$ et $(R,0)$

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

admet i et $-i$ comme pôle simple, seul i est à l'intérieur du lacet γ donc

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi res(i)$$

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$$

$$(z-i)f(z) = \frac{1}{z+i}$$

Donc

$res(i) = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$

Par conséquent

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi\left(-\frac{i}{2}\right) = \pi$$

Sur le demi-cercle $\mathcal{C}$: $z = R^{i\pi t}$ et $t \in [0,1]$

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_0^1 \frac{1}{1+R^2e^{2i\pi t}} Ri\pi e^{i\pi t}dt = i\pi \int_0^1 \frac{Re^{i\pi t}}{1+R^2e^{2i\pi t}}dt$$

Comme

$$\left|i\pi\int_0^1 \frac{Re^{i\pi t}}{1+R^2e^{2i\pi t}}dt\right| = \left|\pi\int_0^1 \frac{Re^{i\pi t}}{1+R^2e^{2i\pi t}}dt\right| \le \pi\int_0^1 \left|\frac{Re^{i\pi t}}{1+R^2e^{2i\pi t}}\right| dt = \pi\int_0^1 \left|\frac{R}{1+R^2e^{2i\pi t}}\right| dt$$

$$\le \pi\int_0^1 \frac{R}{R^2-1}\, dt = \pi\frac{R}{R^2-1}\int_0^1 dt = \pi\frac{R}{R^2-1}\xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

Alors

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\mathcal{C} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

Lorsque $R \to +\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \int_\gamma f(z)dz = \pi$$

b. Avant d'appliquer le théorème des résidus, il faut trouver les pôles de $\frac{1}{x^4+1}$

$$x^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -1 \Leftrightarrow x \in \left\{e^{\frac{i\pi}{4}}, e^{\frac{3i\pi}{4}}, e^{\frac{5i\pi}{4}}, e^{\frac{7i\pi}{4}}\right\}$$

Dans le lacet décrit au a. seul $e^{\frac{i\pi}{4}}$ et $e^{\frac{3i\pi}{4}}$ sont à l'intérieur, il faut trouver leur résidu.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{\left(x - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(x - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(x - e^{\frac{5i\pi}{4}}\right)\left(x - e^{\frac{7i\pi}{4}}\right)}$$

$$res\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right) = \frac{1}{\left(e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{\frac{5i\pi}{4}}\right)\left(e^{\frac{i\pi}{4}} - e^{\frac{7i\pi}{4}}\right)} = \frac{1}{\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^3\left(1 - e^{\frac{i\pi}{2}}\right)(1 - e^{i\pi})\left(1 - e^{\frac{3i\pi}{2}}\right)}$$

$$= \frac{1}{e^{\frac{3i\pi}{4}}(1-i)2(1+i)} = \frac{e^{-\frac{3i\pi}{4}}}{4} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}}$$

$$res\left(e^{\frac{3i\pi}{4}}\right) = \frac{1}{\left(e^{\frac{3i\pi}{4}} - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(e^{\frac{3i\pi}{4}} - e^{\frac{5i\pi}{4}}\right)\left(e^{\frac{3i\pi}{4}} - e^{\frac{7i\pi}{4}}\right)} = \frac{1}{e^{\frac{9i\pi}{4}}(1+i)(1-i)(1-(-1))} = \frac{e^{-\frac{9i\pi}{4}}}{4}$$

$$= \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{4} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}}$$

Donc

$$\int_\gamma f(z)dz = 2i\pi\left(res\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right) + res\left(e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\right) = 2i\pi\left(\frac{-1-i}{4\sqrt{2}} + \frac{1-i}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Sur le demi-cercle $\mathcal{C}$: $z = Re^{i\pi t}$ et $t \in [0,1]$

$$\int_\mathcal{C} f(z)dz = \int_0^1 \frac{1}{1+R^4e^{4i\pi t}} Ri\pi e^{i\pi t}dt = i\pi\int_0^1 \frac{Re^{i\pi t}}{1+R^4e^{4i\pi t}}dt$$

Comme

$$\left|i\pi\int_0^1 \frac{Re^{i\pi t}}{1+R^4e^{4i\pi t}}dt\right| = \left|\pi\int_0^1 \frac{Re^{i\pi t}}{1+R^4e^{4i\pi t}}dt\right| \le \pi\int_0^1 \left|\frac{Re^{i\pi t}}{1+R^4e^{4i\pi t}}\right| dt = \pi\int_0^1 \left|\frac{R}{1+R^4e^{4i\pi t}}\right| dt$$

$$\le \pi\int_0^1 \frac{R}{R^4-1} dt = \pi\frac{R}{R^4-1}\int_0^1 dt = \pi\frac{R}{R^4-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

Alors

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\mathcal{C} f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

Lorsque $R \to +\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}dx = \int_\gamma f(z)dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

c.

Calcul du résidu de i :

$$(z-i)\frac{e^{ipz}}{1+z^2}=\frac{e^{ipz}}{z+i}\underset{z\to i}{\longrightarrow}\frac{e^{-p}}{2i}$$

Sur le demi-cercle $\mathcal{C}$: $z=R^{i\pi t}$ et $t\in[0,1]$

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz=\int_0^1\frac{e^{Rpie^{i\pi t}}}{1+R^2e^{2i\pi t}}Ri\pi e^{i\pi t}dt$$

$$e^{Rpie^{i\pi t}}e^{Rpi(\cos(\pi t)+i\sin(\pi t))}=e^{Rpi\cos(\pi t)}e^{-Rp\sin(\pi t)}$$

$$\left|\int_0^1\frac{e^{Rpie^{i\pi t}}}{1+R^2e^{2i\pi t}}Ri\pi e^{i\pi t}dt\right|\le\int_0^1\left|\frac{e^{Rpie^{i\pi t}}}{1+R^2e^{2i\pi t}}Ri\pi e^{i\pi t}\right|dt=\int_0^1\frac{e^{-Rp\sin(\pi t)}}{|1+R^2e^{2i\pi t}|}R\pi dt$$

$$\le\int_0^1\frac{e^{-Rp\sin(\pi t)}}{R^2-1}R\pi dt=\frac{R\pi}{R^2-1}\int_0^1 e^{-Rp\sin(\pi t)}dt\le\frac{R\pi}{R^2-1}\int_0^1 dt$$

Car pour tout $t\in[0,1],\sin(\pi t)\le 0$, donc

$$\left|\int_0^1\frac{e^{Rpie^{i\pi t}}}{1+R^2e^{2i\pi t}}Ri\pi e^{i\pi t}dt\right|\le\frac{R\pi}{R^2-1}\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

Puis

$$\int_{-R}^{R}f(x)dx=\int_{-R}^{R}\frac{e^{ix}}{1+x^2}dx\underset{R\to+\infty}{\longrightarrow}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{1+x^2}dx$$

On a

$\int_{\mathcal{C}}f(z)dz+\int_{-R}^{R}f(x)dx=\int_\gamma f(z)dz=2i\pi res(i)=2i\pi\frac{e^{-p}}{2i}=\pi e^{-p}$

En faisant tendre R vers l'infini, on trouve que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ix}}{1+x^2}dx=\pi e^{-p}$$

d. Soit $K=\left\{\rho e^{i\theta},0\le\rho\le R\ \text{ et }\ 0\le\theta\le\frac{2\pi}{n}\right\}$ et γ son bord.

Les pôles de $z\to\frac{1}{1+z^n}$ sont les complexes $z_k=e^{\frac{(2k+1)i\pi}{n}},k\in\{0,1,\dots,n-1\}$ seul $z_0=e^{\frac{i\pi}{n}}$ est dans K.

Puis on utilise le fait que si a est un pôle simple de $f=g/h$ alors le résidu de f en a est $\frac{g(a)}{h'(a)}$ donc

$$res(z_0)=\frac{1}{n\left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^{n-1}}=\frac{1}{ne^{i\pi-\frac{i\pi}{n}}}=-\frac{e^{\frac{i\pi}{n}}}{n}$$

D'après le théorème des résidus

$$I_R=\int_\gamma\frac{1}{1+z^n}dz=2i\pi\left(-\frac{e^{\frac{i\pi}{n}}}{n}\right)$$

En découpant γ en trois parties

$$I_R = \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} + \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{iRe^{it}}{1+R^n e^{int}} dt + \int_R^0 \frac{e^{\frac{2i\pi}{n}}}{1+x^n\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n} dx =$$

$$= \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} + \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{iRe^{it}}{1+R^n e^{int}} dt - e^{\frac{2i\pi}{n}} \int_0^R \frac{1}{1+x^n} dx$$

$$= \left(1 - e^{\frac{2i\pi}{n}}\right) \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} + \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{iRe^{it}}{1+R^n e^{int}} dt$$

$$= -e^{\frac{i\pi}{n}} \left(e^{\frac{i\pi}{n}} - e^{-\frac{i\pi}{n}}\right) \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} + \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{iRe^{it}}{1+R^n e^{int}} dt$$

$$= -2i\pi e^{\frac{i\pi}{n}} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \int_0^R \frac{dx}{1+x^n} + \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{iRe^{it}}{1+R^n e^{int}} dt$$

$$\left|\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{iRe^{it}}{1+R^n e^{int}} dt\right| \le \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \left|\frac{iRe^{it}}{1+R^n e^{int}}\right| dt = R\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{1}{|1+R^n e^{int}|} dt \le R\int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{1}{R^n-1} dt$$

$$= \frac{2\pi}{n} \frac{R}{R^n-1} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

Donc

$$2i\pi\left(-\frac{e^{\frac{i\pi}{n}}}{n}\right) = -2i\pi e^{\frac{i\pi}{n}} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$$

Ce qui entraine que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$$

e. $0 < \epsilon < 1 < R$

On appelle $K_{\epsilon,R}$ le compact délimité par le demi-cercle $C_\epsilon = \{|z| = \epsilon, Re(z) \le 0\}$, les deux segments $I^+_{\epsilon,R} = \left[i\epsilon, i\epsilon + \sqrt{R^2-\epsilon^2}\right]$ et $I^-_{\epsilon,R} = \left[-i\epsilon, -i\epsilon + \sqrt{R^2-\epsilon^2}\right]$ et l'arc de cercle $\Gamma_{\epsilon,R} = \left\{Re^{i\theta}; \theta \in [-\pi,\pi], \theta \ge \theta_{R,\epsilon} = \arctan\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{R^2-\epsilon^2}}\right)\right\}$ et on appelle $B_{R,\epsilon}$ son bord.

Le problème c'est que z^a n'est pas définie sur $\mathbb{C}$, on choisit ici $z^a = r^a e^{ia\theta}$ si $z = re^{i\theta}$ pour $\theta \in]0,2\pi[$

C'est la détermination définie sur $\mathbb{C} \setminus [0,+\infty[$.

$f(z) = \frac{1}{z^a(1+z)}$ admet un seul pôle égal à -1 dans ce compact

$$res(-1) = \frac{1}{(-1)^a} = (-1)^a = e^{ia\pi}$$

Donc $\int_{B_{R,\epsilon}} f(z)dz = 2i\pi e^{ia\pi}$

Quand ϵ tend vers 0

$$\left|\int_{C_\epsilon} f(z)dz\right| \le \frac{1}{\epsilon^a(1-\epsilon)}\pi\epsilon = \frac{\epsilon^{1-a}}{(1-\epsilon)}\pi \to 0$$

D'autre part quand $R \to +\infty$

$$\left|\int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(z)dz\right| \le \int_0^{2\pi} \left|\frac{R^{1-a}}{R-1}\right| d\theta \le 2\pi\frac{R^{1-a}}{R-1} \to 0$$

Il reste à voir

$$\int_{I^+_{\epsilon,R}} f(z)dz \quad \text{et} \quad \int_{I^-_{\epsilon,R}} f(z)dz$$

Si $t > 0$ alors $(t+i\epsilon)^a$ tend vers t^a et $(t-i\epsilon)^a$ tend vers $e^{2i\pi a}t^a$ lorsque ϵ tend vers 0.

De plus, pour tout $t > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$|f(t+iy)| \leq \frac{1}{t^a(1+t)}$$

Cette fonction est intégrable sur $]0, +\infty[$ donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée

$$\int_{I^+_{\epsilon,R}} f(z)dz \to \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)} dx \quad \text{et} \quad \int_{I^-_{\epsilon,R}} f(z)dz \to \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)} dx$$

En utilisant la formule des résidus

$$\left(1 - e^{-2ia\pi}\right) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)} dx = 2i\pi e^{-ia\pi}$$

En factorisant par $e^{-ia\pi}$

$$e^{-ia\pi}\left(e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}\right) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)} dx = 2i\pi e^{-ia\pi}$$

$$2i \sin(a\pi) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)} dx = 2i\pi$$

Finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)} dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$$