Université Claude Bernard
L3 Math Eco Probabilités 5

Mathématiques
2016-2017

**Contrôle continu**
**Mercredi 1er mars 2017**

**Durée : 1H30**

**Les documents et les calculatrices sont interdits.**
On prendra soin de **JUSTIFIER** les réponses aux exercices.

**Questions de Cours (4 points) :**

1. (2 points) Énoncer le théorème définissant l'espérance conditionnelle.
2. (1 point) Donner la formule pour $\mathbf{E}(h(X)|Y)$ quand le couple $(X, Y)$ a une densité $p$.
3. (1 point) Énoncer le théorème pour l'espérance conditionnelle d'un vecteur gaussien.

## Exercice 1 (8 points)

Soit $(X_1, X_2, X_3)$ un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(m, \Gamma)$ avec $m = (1, 2, 1)$ et

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soit aussi

$$Y = (Y_1, Y_2, Y_3) = (2X_1 - X_2, X_2, 2X_3 - X_2).$$

1. Calculer, si elle existe, la densité de la loi de la variable aléatoire $X_1$.
2. Trouver la loi de $Y$ et montrer que sa covariance est :
$$C = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$
3. Les variables $Y_1 = 2X_1 - X_2$ et $Y_3 = 2X_3 - X_2$ sont elles indépendantes ?
4. Calculer, si elle existe, la densité de la loi du vecteur aléatoire $Y$.
5. Calculer, si elle existe, la densité de la loi du vecteur aléatoire $(X_1, X_3)$.
6. Soit
$$Z = \frac{Y_1^2}{3} + \frac{Y_3^2}{3}.$$
Calculer pour $t > 0$
$$\mathbf{E}(exp(-tZ)).$$
En déduire la loi de $Z$.
7. On note comme d'habitude cos le cosinus et sin le sinus. Soit
$$T = (T_1, T_2) := \left( \frac{Y_1 \cos(Y_2) + Y_3 \sin(Y_2)}{2}, \frac{(Y_2 - 2)\sqrt{3}}{2} \right).$$
Montrer que $T_1, T_2$ sont indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, 3)$

**Exercice 2** **(8 points+ Bonus 2 points)** Soit $(X, Y)$ un vecteur aléatoire de loi

$$P_{(X,Y)} = \frac{1}{4}\delta_{\{(2,1)\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{(2,-1)\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{(-1,0)\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{(1,0)\}}.$$

1. Calculer les lois marginales $P_X, P_Y$.
2. Calculer l'espérance conditionnelle de $Y$ sachant $\sigma(X)$ : $\mathbf{E}(Y|X)$.
3. Calculer l'espérance conditionnelle du produit $\mathbf{E}(Y|X)X$ sachant $\sigma(Y)$ :$\mathbf{E}(\mathbf{E}(Y|X)X|Y)$.
4. Soit $Z$ de même loi que $X$ ; $T$ de même loi que $Y$ avec $Z, T$ indépendants. Calculer l'espérance conditionnelle du produit $ZT^2$ sachant $\sigma(T)$ : $\mathbf{E}(ZT^2|T)$.
5. Calculer l'espérance conditionnelle du produit $XY^2$ sachant $\sigma(Y)$ : $\mathbf{E}(XY^2|Y)$.
6. Calculer l'espérance conditionnelle du produit $X^2$ sachant $\sigma(Y)$ : $\mathbf{E}(X^2|Y)$.
7. Calculer l'espérance conditionnelle du produit $Y^2$ sachant $\sigma(X)$ : $\mathbf{E}(Y^2|X)$.
8. Est-ce que $X$ et $Y$ sont indépendants ?
9. Montrer que l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(\mathbf{E}(XY^2|Y)|X) = 21_{\{X=2\}}$.
   A-t-on $\mathbf{E}(\mathbf{E}(XY^2|Y)|X) = \mathbf{E}(XY^2|X)$ ?
10. **(Bonus 2 points)** A-t-on $\sigma(X^2) \subset \sigma(Y)$ ? A-t-on $\sigma(X) \subset \sigma(Y)$ ?