Université Claude Bernard — Mathématiques

L3 Math Eco Probabilités 5 — 2016-2017

Contrôle continu
Mercredi 1er mars 2017

Durée : 1H30

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de justifier les réponses aux exercices.

Questions de Cours (4 points) :

1. (2 points) Énoncer le théorème définissant l'espérance conditionnelle. Th 35 (ou Th 36.6 cas positif)
2. (1 point) Donner la formule pour $\mathbf{E}(h(X)|Y)$ quand le couple (X, Y) a une densité p. Th 38
3. (1 point) Énoncer le théorème pour l'espérance conditionnelle d'un vecteur gaussien. (THm 41 ou 42 du cours de 2017)

Exercice 1 (8 points) Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(m, \Gamma)$ avec $m = (1, 2, 1)$ et

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Soit aussi

$$Y = (Y_1, Y_2, Y_3) = (2X_1 - X_2, X_2, 2X_3 - X_2).$$

1. Calculer, si elle existe, la densité de la loi de la variable aléatoire X_1.
2. Calculons la matrice de covariance du vecteur Y

   $Y = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ donc Y est un vecteur gaussien. Sa loi est donc $\mathcal{N}(Am, A\Gamma A^T)$

   Or $Am = (0, 2, 0)$ et :

$$C = A\Gamma A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

   Donc $Y \sim \mathcal{N}((0, 2, 0), C)$.
3. Les variables $Y_1 = X_1$ et Y_3 sont indépendantes vu que Y vecteur gaussien et $Cov(Y_1, Y_3) = 0$
4. Comme expliqué Y est un vecteur gaussien $\mathcal{N}((0, 2, 0), C)$ donc de densité (comme celle de 3 variables gaussiennes indépendantes vu $det(C) = 24^2 \neq 0$)

$$f_Y(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{24(\sqrt{2\pi})^3} exp(-\frac{y_1^2}{24} - \frac{(y_2 - 2)^2}{8} - \frac{y_3^2}{24}).$$

5. $(X_1, X_3) \sim \mathcal{N}((0,0), D)$ avec $D = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ Or $det(D) = 16 - 1 = 15 \neq 0, C^{-1} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ donc (X_1, X_2) admet pour densité

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{15}} exp(-\frac{4(x_1-1)^2 + 4(x_2-1)^2 - 2(x_1-1)(x_2-1)}{30}).$$

6. Soit

$$Z = \frac{Y_1^2}{3} + \frac{Y_3^2}{3}.$$

Calculons pour $t > 0$ en utilisant Y_1, Y_3 i.i.d

$$\mathbf{E}(exp(-tZ)) = [\mathbf{E}(exp(-tY_1^2/3))]^2.$$

Or par transfert

$$\mathbf{E}(exp(-tY_1^2/3)) = \frac{1}{\sqrt{24\pi(8t+1)}}\sqrt{8t+1}\int dx exp(-\frac{(8t+1)x^2}{24}) = \frac{1}{\sqrt{8t+1}}$$

en utilisant la densité de la loi $\mathcal{N}(0, \frac{12}{(8t+1)})$ Or $\frac{1}{8}\int_0^\infty exp(-tz - z/8)dz = \frac{1}{(8t+1)}$ donc par égalité des transformées de Laplace Z est de loi exponentielle de paramètre $1/8$ (moyenne 8).

7. On note comme d'habitude cos le cosinus et sin le sinus. Soit

$$T = (T_1, T_2) := \left(\frac{Y_1\cos(Y_2) + Y_3\sin(Y_2)}{2}, \frac{(Y_2-2)\sqrt{3}}{2}\right).$$

On calcule la fonction caractéristique de T :

$$\Phi_T(x, y) = E(\exp(ix\frac{Y_1\cos(Y_2) + Y_3\sin(Y_2)}{2} + iy\frac{(Y_2-2)\sqrt{3}}{2})$$

Or vu (Y_1, Y_3) indépendant de Y_2 calculns

$$\begin{aligned}\phi(y_2) &= E(\exp(ix\frac{Y_1\cos(y_2) + Y_3\sin(y_2)}{2})) = \Phi_{(Y_1,Y_3)}(x\cos(y_2)/2, x\sin(y_2)/2) \\ &= \exp(-12(x^2\cos(y_2)^2/4 + x^2\sin(y_2)^2)/4)/2) = \exp(-3x^2/2)\end{aligned}$$

donc $E(\exp(ix\frac{Y_1\cos(Y_2)+Y_3\sin(Y_2)}{2})|Y_2) = \phi(Y_2)$
et

$$\begin{aligned}\Phi_T(x, y) &= E(\phi(Y_2)\exp(iy\frac{(Y_2-2)\sqrt{3}}{2})) = \exp(-3x^2/2)\Phi_{Y_2-2}(y\sqrt{3}/2) \\ &= \exp(-3x^2/2 - 3y^2 * 4/8) = \exp(-3(x^2+y^2)/2)\end{aligned}$$

On obtient donc T_1, T_2 sont indépendantes (forme produit de la transformée de Fourier) de même loi $\mathcal{N}(0, 3)$

Exercice 2 (8 points+ Bonus 2 points) Soit (X,Y) un vecteur aléatoire de loi

$$P_{(X,Y)} = \frac{1}{4}\delta_{\{(2,1)\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{(2,-1)\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{(-1,0)\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{(1,0)\}}.$$

1. On a $X : \Omega \to \{2,1,-1\}$, $X : \Omega \to \{-1,0,1\}$ donc on a 6 probabilités à trouver. Pour Y on lit sur la loi du couple $P(Y=1) = P(Y=-1) = 1/4$ soit la loi

$$P_Y = \frac{1}{4}\delta_{\{1\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{-1\}} + \frac{1}{2}\delta_{\{0\}}.$$

Pour X, on lit $P(X=-1) = 1/4 = P(X=1)$, donc la loi est :

$$P_X = \frac{1}{2}\delta_{\{2\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{-1\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{1\}}$$

2. Calculons l'espérance conditionnelle de Y sachant $\sigma(X)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y|X) &= \mathbf{E}(Y|X=2)1_{X=2} + \mathbf{E}(Y|X=1)1_{X=1} + \mathbf{E}(Y|X=-1)1_{X=-1} \\ &= \frac{1/4-1/4}{1/2}1_{X=2} + \frac{0/4}{1/4}1_{X=-1} + \frac{0/4}{1/4}1_{X=1} = 0.\end{aligned}$$

3. Calculons $\mathbf{E}(\mathbf{E}(Y|X)X|Y) = \mathbf{E}(0X|Y) = 0$.
4. Soit Z de même loi que X ; T de même loi que Y avec Z,T indépendants. Calculons l'espérance conditionnelle du produit ZT^2 sachant $\sigma(T)$: $\mathbf{E}(ZT^2|T) = T^2\mathbf{E}(Z|T)$ par modularité puis par indépendance

$$\mathbf{E}(Z|T) = \mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X) = 2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{4} - 1\frac{1}{4} = 1$$

donc $\mathbf{E}(ZT^2|T) = T^2$.

5. Calculons l'espérance conditionnelle du produit XY^2 sachant $\sigma(Y)$ Méthode 1 :On remarque

$$XY^2 = 21_{(X,Y)=(2,1)} + 21_{(X,Y)=(2,-1)} + 01_{(X,Y)=(-1,0)} + 01_{\{(1,0)\}} = 2.1_{Y\neq 0} = 21_{X=2}$$

donc il est à la fois $\sigma(Y)$ mesurable et $\sigma(X)$ mesurable donc

$$\mathbf{E}(XY^2|Y) = XY^2 = 2.1_{Y\neq 0} = 2Y^2.$$

Méthode 2 (systématique) : $\mathbf{E}(XY^2|Y) = Y^2\mathbf{E}(X|Y)$ par modularité puis

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X|Y) &= \mathbf{E}(X|Y=1)1_{Y=1} + \mathbf{E}(X|Y=-1)1_{Y=-1} + \mathbf{E}(X|Y=0)1_{Y=0} \\ &= \frac{2.1/4}{1/4}1_{Y=1} + \frac{2.1/4}{1/4}1_{Y=-1} + \frac{1/4-1/4}{1/2}1_{Y=0} = 21_{Y\neq 0}.\end{aligned}$$

Donc $\mathbf{E}(XY^2|Y) = 2Y^21_{Y\neq 0} = 2Y^2$.

6. Calculons l'espérance conditionnelle du produit X^2 sachant $\sigma(Y)$: $\mathbf{E}(X^2|Y)$. On note que

$$P_{(X^2,Y)} = \frac{1}{4}\delta_{\{(4,1)\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{(4,-1)\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{(1,0)\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{(1,0)\}} = \frac{1}{4}\delta_{\{(4,1)\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{(4,-1)\}} + \frac{1}{2}\delta_{\{(1,0)\}}.$$

Donc $X^2 = 31_{Y\neq 0} + 1$ qui est $\sigma(Y)$ mesurable donc $\mathbf{E}(X^2|Y) = X^2$.

7. Calculons l'espérance conditionnelle du produit Y^2 sachant $\sigma(X)$ Méthode 1 :

$$Y^2 = 1_{(X,Y)=(2,1)} + 1_{(X,Y)=(2,-1)} + 01_{(X,Y)=(-1,0)} + 01_{\{(1,0)\}} = 1_{Y\neq 0} = 1_{X=2}.$$

Donc $\mathbf{E}(Y^2|X) = Y^2 = 1_{X=2}$.
Méthode 2 : $\mathbf{E}(Y^2|X)$. On a

$$P_{(X,Y^2)} = \frac{1}{4}\delta_{\{(2,1)\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{(2,1)\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{(-1,0)\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{(1,0)\}} = \frac{1}{2}\delta_{\{(2,1)\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{(-1,0)\}} + \frac{1}{4}\delta_{\{(1,0)\}}.$$

Donc $\mathbf{E}(Y^2|X) = \mathbf{E}(Y^2|X=2)1_{X=2} + \mathbf{E}(Y^2|X=1)1_{X=1} + \mathbf{E}(Y^2|X=-1)1_{X=-1} = 1_{X=2} + 0 + 0 = 1_{X=2}$

8. Est-ce que X et Y sont indépendants ? Non par exemple car $\mathbf{E}(Y^2|X) \neq E(Y^2)$.

9. Calculons l'espérance conditionnelle par les questions 5 et 7 (ou question 5 seule par la méthode 1 vu $XY^2 = 21_{\{X=2\}}$) $\mathbf{E}(\mathbf{E}(XY^2|Y)|X) = \mathbf{E}(2Y^2|X) = 21_{\{X=2\}}$.
A-t-on $\mathbf{E}(\mathbf{E}(XY^2|Y)|X) = \mathbf{E}(XY^2|X)$? Oui car par modularité et 7 : $\mathbf{E}(XY^2|X) = X\mathbf{E}(Y^2|X) = X1_{X=2} = 21_{X=2}$

10. A-t-on $\sigma(X^2) \subset \sigma(Y)$? Oui vu que $\mathbf{E}(X^2|Y) = X^2$.(cf . 6) A-t-on $\sigma(X) \subset \sigma(Y)$? Non car

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(1_{X=1}|Y) &= \mathbf{E}(1_{X=1}|Y=1)1_{Y=1} + \mathbf{E}(1_{X=1}|Y=-1)1_{Y=-1} + \mathbf{E}(1_{X=1}|Y=0)1_{Y=0} \\ &= 0 + 0 + \frac{1/4}{1/2}1_{Y=0} = 21_{Y=0} \neq 1_{X=1}.\end{aligned}$$