Université Claude Bernard | Mathématiques
L3 Math Eco Probabilités 5 | 2017-2018

Contrôle continu
Mercredi 7 mars 2018

Durée : 1H30

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de **JUSTIFIER** les réponses aux exercices.

Questions de Cours (4 points) :

1. (1,5 points) Énoncer le Théorème de Paul Lévy (version forte pour la transformée de Fourier).
2. (1 point) Donner la transformée de Fourier d'un vecteur gaussien $\mathcal{N}(m, \Gamma)$.
3. (0,5 points) Énoncer la propriété de conditionnement successif.
4. (1 point) Donner l'inégalité de Jensen pour l'espérance conditionnelle.

Exercice 1 (4 points+ Bonus : 1 point)
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes avec X_n de loi

$$P_{X_n}(dx) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}dx.$$

Soit Y de loi

$$P_Y(dy) = \frac{1}{2}e^{-|y|}dx.$$

On pose

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. Calculer la fonction caractéristique (transformée de Fourier) de Y.
2. Calculer la fonction caractéristique de T_n.
3. Déterminer la limite en loi de la suite $(T_n)_{n\geq 1}$.
4. **(Bonus :1 point)** Peut-on appliquer le théorème central limite à $(X_n)_{n\geq 1}$? Qu'en déduisez vous ?

Exercice 2 (4 points+ Bonus 1 point) Soit (X, Y) un vecteur aléatoire de loi

$$P_{(X,Y)} = \frac{1}{5}\delta_{\{(-1,-1)\}} + \frac{1}{5}\delta_{\{(-1,1)\}} + \frac{1}{5}\delta_{\{(0,-1)\}} + \frac{1}{5}\delta_{\{(1,-1)\}} + \frac{1}{5}\delta_{\{(1,1)\}}.$$

1. Calculer les lois marginales P_X, P_Y.
2. Calculer l'espérance conditionnelle de X sachant $\sigma(Y)$:$\mathbf{E}(X|Y)$.
3. Calculer l'espérance conditionnelle de Y sachant $\sigma(X)$:$\mathbf{E}(Y|X)$.
4. Soit Z de même loi que X ; T de même loi que Y avec Z, T indépendants. Calculer l'espérance conditionnelle du produit Z^2T^3 sachant $\sigma(T)$: $\mathbf{E}(Z^2T^3|T)$.
5. **(Bonus :1 point)** Calculer l'espérance conditionnelle du produit X^2Y^3 sachant $\sigma(Y)$: $\mathbf{E}(X^2Y^3|Y)$.

Exercice 3 (8 points)

Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(m, \Gamma)$ avec $m = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Soit aussi

$$Y = (Y_1, Y_2, Y_3) = (X_1, X_2 - \frac{X_1}{2}, X_3 - \frac{X_1}{2}).$$

1. Calculer, si elle existe, la densité de la loi de la variable aléatoire Y_2 et montrer que sa variance vaut $\frac{7}{2}$.
2. Trouver la loi du vecteur aléatoire Y.
3. Calculer, si elle existe, la densité de la loi du vecteur aléatoire (Y_1, Y_3) et montrer que sa covariance est :
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
4. Les variables $Y_2 = X_2 - \frac{X_1}{2}$ et $Y_3 = X_3 - \frac{X_1}{2}$ sont elles indépendantes ?
5. Calculer, si elle existe, la densité de la loi du vecteur aléatoire (X_1, X_2).
6. Calculer
$$\mathbf{E}\Big(\frac{Y_1 - 1}{Y_1 + Y_3 - 1}\Big).$$
7. Soit
$$T = (T_1, T_2) := \left(\frac{Y_2 + Y_3 Y_1}{\sqrt{7 + 2Y_1 + 4Y_1^2}}, \frac{Y_1 - 1}{2}\right).$$
Montrer que T_1, T_2 sont indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$