Université Claude Bernard
L3 Math Eco Probabilités 5

Mathématiques
2017-2018

Contrôle continu
Mercredi 7 mars 2018

Durée : 1H30

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de **JUSTIFIER** les réponses aux exercices.

Questions de Cours (4 points) :

1. (1,5 points) Énoncer le Théorème de Paul Lévy (version forte pour la transformée de Fourier).
2. (1 point) Donner la transformée de Fourier d'un vecteur gaussien $\mathcal{N}(m, \Gamma)$.
3. (0,5 points) Énoncer la propriété de conditionnement successif.
4. (1 point) Donner l'inégalité de Jensen pour l'espérance conditionnelle.

Exercice 1 (4 points+ Bonus : 1 point)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes avec X_n de loi

$$P_{X_n}(dx) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}dx.$$

Soit Y de loi

$$P_Y(dy) = \frac{1}{2}e^{-|y|}dx.$$

On pose

$$T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. Calculer la fonction caractéristique (transformée de Fourier) de Y est par transfert :

$$E(e^{iYt}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iys}P_Y(dy) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{iys-y}dy + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{iys+y}dy = [\frac{e^{iys-y}}{2(is-1)}]_0^{\infty} + [\frac{e^{iys+y}}{2(is+1)}]_{-\infty}^{0}$$
$$= \frac{1}{2(is+1)} - \frac{1}{2(is-1)} = -\frac{1}{(is+1)(is-1)} = \frac{1}{s^2+1}$$

2. Calculons la fonction caractéristique de $\Phi_{T_n}(t) = \Phi_{\sum_{k=1}^n X_k}(t/n) = \prod_{k=1}^n \Phi_{X_k}(t/n)$ avec la dernière égalité par indépendance. Par distribution identique $\Phi_{T_n}(t) = \Phi_{X_1}(t/n))^n$. Or par le théorème d'inversion de Fourier appliqué à la première question on trouve $\Phi_{X_1}(t) = exp(-|t|)$. Donc

$$\Phi_{T_n}(t) = [exp(-|t|/n)]^n = \exp(-|t|)$$

3. Comme $\Phi_{T_n}(t) \to \Phi_{X_1}(t)$ on déduit que $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers la même loi de Cauchy que X_1.
4. **(Bonus :1 point)** Si on pouvait appliquer le théorème central limite à $(X_n)_{n\geq 1}$, on aurait convergence de $\sqrt{n}T_n$ vers une loi normale donc convergence en loi de T_n vers 0 ce qui n'est pas le cas. Comme l'hypothèse i.i.d est vérifiée, c'est que $E(X_1^2) = +\infty$.

Exercice 2 (4 points+ Bonus 1 point) Soit (X,Y) un vecteur aléatoire de loi

$$P_{(X,Y)} = \frac{1}{5}\delta_{\{(-1,-1)\}} + \frac{1}{5}\delta_{\{(-1,1)\}} + \frac{1}{5}\delta_{\{(0,-1)\}} + \frac{1}{5}\delta_{\{(1,-1)\}} + \frac{1}{5}\delta_{\{(1,1)\}}.$$

1. On a $X : \Omega \to \{-1,0,1\}$, $Y : \Omega \to \{-1,1\}$ donc on a 5 probabilités à trouver. Pour Y on lit sur la loi du couple $P(Y=1) = P(Y=1, X=-1) + P(Y=1, X=1) + P(Y=1, X=0) = 1/5 + 1/5 + 0 = 2/5$ donc P(Y=-1)=3/5 soit la loi

$$P_Y = \frac{2}{5}\delta_{\{1\}} + \frac{3}{5}\delta_{\{-1\}}.$$

Pour X, on lit $P(X=-1) = 2/4 = P(X=1)$, donc la loi est :

$$P_X = \frac{1}{5}\delta_{\{0\}} + \frac{2}{5}\delta_{\{-1\}} + \frac{2}{5}\delta_{\{1\}}$$

2. Calculons l'espérance conditionnelle de X sachant $\sigma(Y)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X|Y) &= \mathbf{E}(X|Y=1)1_{Y=1} + \mathbf{E}(X|Y=-1)1_{Y=-1} \\ &= \frac{1/5 + 0/5 - 1/5}{3/5}1_{Y=-1} + \frac{1/5 - 1/5}{2/5}1_{Y=1} = 0.\end{aligned}$$

3. Calculons l'espérance conditionnelle de Y sachant $\sigma(X)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y|X) &= \mathbf{E}(Y|X=0)1_{X=0} + \mathbf{E}(Y|X=1)1_{X=1} + \mathbf{E}(Y|X=-1)1_{X=-1} \\ &= \frac{-1/5}{1/5}1_{X=0} + \frac{1/5 - 1/5}{2/5}1_{X=-1} + \frac{1/5 - 1/5}{2/5}1_{X=1} = -1_{X=0}.\end{aligned}$$

4. Soit Z de même loi que X ; T de même loi que Y avec Z, T indépendants. Calculons l'espérance conditionnelle du produit Z^2T^3 sachant $\sigma(T)$: $\mathbf{E}(Z^2T^3|T)$. Notez $T^3 = T$. Par modularité $\mathbf{E}(Z^2T^3|T) = T^3\mathbf{E}(Z^2|T)$. Par indépendance $\mathbf{E}(Z^2|T) = E(Z^2) = 1\frac{4}{5} + 0\frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ d'où $\mathbf{E}(Z^2T^3|T) = \frac{4T}{5}$.
5. **(Bonus :1 point)** Calculons l'espérance conditionnelle du produit X^2Y^3 sachant $\sigma(Y)$: Par modularité $\mathbf{E}(X^2Y^3|Y) = Y^3\mathbf{E}(X^2|Y)$. Or $Y^3 = Y$.
Et par le cas discret :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X^2|Y) &= \mathbf{E}(X^2|Y=1)1_{Y=1} + \mathbf{E}(X^2|Y=-1)1_{Y=-1} \\ &= \frac{1/5 + 0/5 + 1/5}{3/5}1_{Y=-1} + \frac{1/5 + 1/5}{2/5}1_{Y=1} = \frac{2}{3}1_{Y=-1} + 1_{Y=1}.\end{aligned}$$

Si on calcule

$$\mathbf{E}(X^2Y^3|Y) = Y\mathbf{E}(X^2|Y) = -\frac{2}{3}1_{Y=-1} + 1_{Y=1} = Y + \frac{1}{3}1_{Y=-1}$$

Exercice 3 (8 points)

Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(m, \Gamma)$ avec $m = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Soit aussi

$$Y = (Y_1, Y_2, Y_3) = (X_1, X_2 - \frac{X_1}{2}, X_3 - \frac{X_1}{2}).$$

1. Calculer, si elle existe, la densité de la loi de la variable aléatoire Y_2 et montrer que sa variance vaut $\frac{7}{2}$.

   Par combinaison linéaire d'un vecteur gaussien, Y_2 est de loi normale. $E(Y_2) = E(X_2) - \frac{E(X_1)}{2} = 1/2 - 1/2 = 0$, $Var(Y_2) = Var(X_2) + Var(X_1)/4 - Cov(X_1, X_2) = 4 + 1/2 - 1 = \frac{7}{2} \neq 0$ donc Y_2 a densité $\frac{1}{\sqrt{7\pi}} e^{-y_2^2/7}$.
2. Trouvons la loi du vecteur aléatoire Y.

   Par combinaison linéaire $Y = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc Y est un vecteur gaussien.

   Sa loi est donc $\mathcal{N}(Am, A\Gamma A^T)$ Or $Am = (1, 0, 0)$ et :

$$D = A\Gamma A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Donc $Y \sim \mathcal{N}((1, 0, 0), D)$.
3. En extrayant de Y (par projection linéaire) $(Y_1, Y_3) \sim \mathcal{N}((1, 0), C)$ avec la covariance

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Comme $det(D) = 2.2 = 4 \neq 0$, Par le cours la densité est $\frac{1}{4\pi} exp(-y_1^2/4 - y_3^2/4)$.
4. Comme le vecteur Y est gaussien et $Cov(Y_2, Y_3) = 1/2 \neq 0$ Les variables $Y_2 = X_2 - \frac{X_1}{2}$ et $Y_3 = X_3 - \frac{X_1}{2}$ ne sont PAS indépendantes.
5. Calculer, si elle existe, la densité de la loi du vecteur aléatoire $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}((1, 1/2), E), E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix})$. $det(2) = 2.4 - 1.1 = 7 \neq 0$ donc (X_1, X_2) a une densité. ON a $E^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix})$ donc par le cours la densité est :$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{7}} exp(-\frac{4(x_1-1)^2 + 2(x_2-1/2)^2 - 2(x_1-1)(x_2-1/2)}{14})$
6. On remarque que $(Y_1 - 1, Y_3)$ est i.i.d $\mathcal{N}(0, 2)$ Donc il est égal en loi à $(Y_3, Y_1 - 1)$ donc en appliquant la fonction $h(x, y) = x/x+y$ on obtient $h(Y_1-1, Y_3) = h(Y_3, Y_1-1)$ d'où appliquant l'espérance

$$\mathbf{E}\Big(\frac{Y_1 - 1}{Y_1 + Y_3 - 1}\Big) = \mathbf{E}\Big(\frac{Y_3}{Y_1 + Y_3 - 1}\Big) = a.$$

   Donc par linéarité $2a = \mathbf{E}\Big(\frac{Y_1-1}{Y_1+Y_3-1}\Big) + \mathbf{E}\Big(\frac{Y_3}{Y_1+Y_3-1}\Big) = \mathbf{E}\Big(\frac{Y_1-1+Y_3}{Y_1+Y_3-1}\Big) = 1$ donc $a = 1/2$.

7. Soit
$$T = (T_1, T_2) := \left(\frac{Y_2 + Y_3 Y_1}{\sqrt{7 + 2Y_1 + 4Y_1^2}}, \frac{Y_1 - 1}{2} \right).$$
On calcule la transformée de Fourier
$$\begin{aligned}\Phi_{(T_1,T_2)}(s,t) &= E\Big(\exp(is\frac{Y_2 + Y_3 Y_1}{\sqrt{7 + 2Y_1 + 4Y_1^2}} + it\frac{Y_1 - 1}{2})\Big) \\ &= E\Big(E\Big(\exp(is\frac{Y_2 + Y_3 Y_1}{\sqrt{7 + 2Y_1 + 4Y_1^2}})\Big| Y_1\Big) \exp(it\frac{Y_1 - 1}{2})\Big)\end{aligned}$$
par la propriété caractéristique. Or Y est un vecteur gaussien avec $Cov(Y_1, Y_2) = Cov(Y_1, Y_3) = 0$ donc Y_1 est indépendant de (Y_2, Y_3). Donc on applique la formule du cours en posant cherchant
$$g(y) = E\Big(\exp(is\frac{Y_2 + Y_3 y}{\sqrt{7 + 2y + 4y^2}})\Big) = \Phi_{(Y_2,Y_3)}((\frac{s}{\sqrt{7 + 2y + 4y^2}}, \frac{sy}{\sqrt{7 + 2y + 4y^2}})$$
. Or par le cours
$$\Phi_{(Y_2,Y_3)}(t_2, t_3) = \exp\Big(- \langle (t_2, t_3), \begin{pmatrix} 7/2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix} (t_2, t_3) \rangle)/2\Big) = \exp\Big(- (7/2t_2^2 + t_2 t_3 + 2t_3^2)/2\Big)$$
Donc
$$g(y) = \exp\Big(- \frac{7/2s^2 + s^2 y + 2(sy)^2}{2(7 + 2y + 4y^2)}\Big) = \exp(-s^2/4)$$
donc par le cours
$$E\Big(\exp(is\frac{Y_2 + Y_3 Y_1}{\sqrt{7 + 2Y_1 + 4Y_1^2}})\Big| Y_1\Big) = g(Y_1) = \exp(-s^2/4)$$
soit en réinsérant :
$$\Phi_{(T_1,T_2)}(s,t) = \exp(-s^2/4) E\Big(\exp(it\frac{Y_1 - 1}{2})\Big) = \exp(-s^2/4)\Phi_{Y_1 - 1}(t/2).$$
Or $Y_1 - 1 \sim \mathcal{N}(0, 2)$ donc $\Phi_{Y_1-1}(t/2) = exp(-2t^2/8)$ on obtient finalement la transformée de Fourier pour 2 v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0, \frac{1}{2})$: à savoir $\exp(-(s^2 + t^2)/4)$.