Université Claude Bernard
L3 Math Eco Probabilités 5

Mathématiques
2018-2019

Contrôle continu
Mercredi 27 février 2019

Durée : 1H30

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de **JUSTIFIER** les réponses aux exercices.

Questions de Cours (4 points) :

1. (0,5 point) Énoncer le Théorème de transfert.
2. (1 point) Énoncer le Théorème central limite pour des variables vectorielles.
3. (1,5 points) Énoncer la version forte du Théorème de Paul Lévy pour la transformée de **Laplace**. (Attention, PAS pour la transformée de Fourier)
4. (1 point) Énoncer le théorème caractérisant l'indépendance d'un vecteur gaussien.

Exercice 1 (7 points)

Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(m, \Gamma)$ avec $m = (1, 1, 1)$ et

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit aussi

$$Y = (Y_1, Y_2, Y_3) = (X_1, X_2 - \frac{X_1 + 2X_3}{3}, \frac{X_3 - X_1}{3}).$$

1. Trouver la loi du vecteur aléatoire Y.
2. Calculer la fonction caractéristique (transformée de Fourier) de la variable aléatoire Y_2 et montrer que sa variance vaut $\frac{2}{3}$.
3. Calculer, si elle existe, la densité de la loi du vecteur aléatoire (Y_1, Y_3) et montrer que sa covariance est :
$$C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$
4. Les variables Y_1 et (Y_2, Y_3) sont elles indépendantes ?
5. Les variables Y_2 et (Y_1, Y_3) sont elles indépendantes ?
6. Calculer la loi de $Z = \frac{Y_2^2 + 2Y_3^2}{2}$.

Exercice 2 (4 points)

Soient X, Y des variables aléatoires indépendantes et de même de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.
Soit $Z : \Omega \to \{-1, 0, 1\}$ une variable aléatoire indépendante de X, Y et telle que

$$P(Z = 1) = P(Z = -1) = \frac{1}{4}.$$

On définit

$$U = \frac{X + YZ^2}{\sqrt{1 + Z^4}}.$$

1. Calculer la loi de Z et l'espérance $E(Z)$.
2. Calculer la fonction caractéristique (transformée de Fourier) de Z.
3. Calculer la fonction caractéristique (transformée de Fourier) du couple (U, Z).
4. Montrer que U et Z sont indépendantes.
5. Est-ce que $(U, U + Z)$ est un vecteur gaussien ? (justifier)

Exercice 3 (5 points) Soit $c > 0$.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes avec X_n de loi

$$P_{X_n}(dx) = \frac{c\sqrt{n}}{\pi(c^2 + x^2 n)} dx.$$

On dit que X_n est de loi de Cauchy de paramètre $\frac{c}{\sqrt{n}}$. On pose

$$T_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. Montrer que la fonction caractéristique (transformée de Fourier) de X_1 est $\Phi_{X_1}(t) = e^{-c|t|}$
2. En déduire la fonction caractéristique (transformée de Fourier) de X_k : $\Phi_{X_k}(t)$.
3. Calculer la fonction caractéristique de T_n.
4. Déterminer la limite en loi de la suite $(T_n)_{n\geq 1}$.