Université Claude Bernard
L3 Math Eco Probabilités 5

Mathématiques
2018-2019

Correction du Contrôle continu 1

Questions de Cours (4 points) : cf cours

Exercice 1 (7 points)

Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(m, \Gamma)$ avec $m = (1, 1, 1)$ et

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit aussi

$$Y = (Y_1, Y_2, Y_3) = (X_1, X_2 - \frac{X_1 + 2X_3}{3}, \frac{X_3 - X_1}{3}).$$

1. Trouver la loi du vecteur aléatoire Y.
   Calculons la matrice de covariance du vecteur Y
   $Y = AX$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & -2/3 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$ donc Y est un vecteur gaussien. Sa loi est donc $\mathcal{N}(Am, A\Gamma A^T)$ Or $Am = (1, 0, 0)$ et :

$$\begin{aligned} D = A\Gamma A^T &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & -2/3 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & -2/3 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ -1 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

   Donc $Y \sim \mathcal{N}((1, 0, 0), D)$.
2. On lit en extrayant de la question 1 que $Y_2 \sim \mathcal{N}(0, 2/3)$. Donc $\Phi_{Y_2}(t) = exp(-t^2/3)$.
3. En extrayant de la matrice D du 1, $(Y_1, Y_3) \sim \mathcal{N}((1, 0), C)$ avec la covariance :

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

   $det(C) = 4/3 - 1 = 1/3 \neq 0$ donc la loi a une densité,
   $C^{-1} = 3 \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ donc (Y_1, Y_3) admet pour densité

$$f(y_1, y_3) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} exp(-\frac{(y_1 - 1)^2 + 12y_3^2 + 6(y_1 - 1)y_3}{2}).$$

4. Les variables Y_1 et (Y_2, Y_3) sont elles indépendantes ? non car $Cov(Y_1, Y_3) = -1 \neq 0$
5. Les variables Y_2 et (Y_1, Y_3) sont elles indépendantes ? Oui car Y est un vecteur gaussien et $Cov(Y_2, Y_3) = Cov(Y_2, Y_1) = 0$ d'après le 1.

6. Calculons la loi de $Z = \frac{Y_2^2+2Y_3^2}{2}$.
   (Y_2, Y_3) est un vecteur gaussien et $cov(Y_2, Y_3) = 0$ par le 1, donc Y_2 , Y_3 sont indépendants. Donc par la covariance $(Y_2\sqrt{3}/\sqrt{2}, Y_3\sqrt{3})$ est iid $\mathcal{N}(0, 1)$.
   donc, par le cours, la somme des carrés $3\frac{Y_2^2+2Y_3^2}{2}$ est de loi exponentielle $\mathcal{E}(1/2)$ d'espérance 2 (c'est-à-dire une loi $\chi^2(2)$). donc $\frac{Y_2^2+2Y_3^2}{2}$ est exponentielle d'espérance 2/3, donc loi exponentielle $\mathcal{E}(3/2)$.

Exercice 2 (4 points)

Soient X, Y des variables aléatoires indépendantes et de même de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
Soit $Z : \Omega \to \{-1, 0, 1\}$ un variable aléatoire indépendante de X, Y et telle que

$$P(Z = 1) = P(Z = -1) = \frac{1}{4}.$$

On définit

$$U = \frac{X + YZ^2}{\sqrt{1 + Z^4}}.$$

1. $P_Z = \frac{1}{4}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_0$ et l'espérance $E(Z) = \frac{1}{4}(1 - 1) + 0 = 0$.
2. $\Phi_Z(t) = \frac{e^{-it}+e^{it}+2}{4}$.
3. Montrons que U et Z sont indépendantes en calculant la transformée de Fourier $\Phi_{(U,Z)}(s, t)$ par transfert et indépendance :

$$\Phi_{(U,Z)}(s, t) = E(exp(i\frac{X + YZ^2}{\sqrt{1 + Z^4}}s + iZt)) = \int P_Z(dz) \int P_{(X,Y)}(dx, dy)exp(i\frac{x + yz^2}{\sqrt{1 + z^4}}s + izt) =$$

   en remplaçant la loi de Z on obtient :

$$\Phi_{(U,Z)}(s, t) = \frac{1}{4}\int P_{(X,Y)}(dx, dy)exp(i\frac{x + y}{\sqrt{1 + 1}}s - it)$$
$$+ \frac{1}{4}\int P_{(X,Y)}(dx, dy)exp(i\frac{x + y}{\sqrt{1 + 1}}s + it) + \frac{1}{2}\int P_{(X,Y)}(dx, dy)exp(ixs).$$

   Donc

$$\Phi_{(U,Z)}(s, t) = \frac{e^{-it} + e^{it}}{4}\Phi_{(X,Y)}(\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}) + \frac{1}{2}\Phi_{(X,Y)}(s, 0) = e^{-s^2/2}\frac{e^{-it} + e^{it} + 2}{4}.$$

4. En regardant $\Phi_{(U,Z)}(s, 0) = \Phi_U(s) = e^{-s^2/2}$ et $\Phi_{(U,Z)}(0, t) = \Phi_Z(t) = \frac{e^{-it}+e^{it}+2}{4}$ on trouve que $\Phi_{(U,Z)}(s, t) = \Phi_U(s)\Phi_Z(t)$ pour tout s, t donc U et Z sont indépendantes...
5. Est-ce que $(U, U + Z)$ est un vecteur gaussien ? (justifier)
   Si c'était le cas $U + Z - U = Z$ serait une combinaison linéaire d'un vecteur gaussien donc gaussien, mais Z est une loi discrète $P(Z = 0) = 1/2 \notin \{1, 0\}$ ce qui sont les deux seules valeurs possibles pour les lois gaussiennes réelles, donc Z n'est pas gaussienne et $(U, U + Z)$ n'est pas un vecteur gaussien.

Exercice 3 (5 points) Soit $c > 0$.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes avec X_n de loi

$$P_{X_n}(dx) = \frac{c\sqrt{n}}{\pi(c^2 + x^2 n)}dx.$$

On dit que X_n est de loi de Cauchy de paramètre $\frac{c}{\sqrt{n}}$. On pose

$$T_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. Montrer que la fonction caractéristique (transformée de Fourier) de X_1 est $\Phi_{X_1}(t) = e^{-c|t|}$.
   On considère Y de loi exponentielle symétrisée de paramètre c de densité : $P_Y(dy) = \frac{c}{2}e^{-c|y|}$.
   On calcule sa transformée de Fourier :

$$\begin{aligned}
\Phi_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{2} e^{-c|y|} e^{iyt} dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} \frac{c}{2} e^{cy+iyt} dy + \int_{0}^{\infty} \frac{c}{2} e^{-cy+iyt} dy \\
&= [\frac{c}{2(c+it)} e^{cy+iyt}]_{-\infty}^{0} + [\frac{c}{2(-c+it)} e^{-cy+iyt}]_{0}^{\infty} \\
&= \frac{c}{2(c+it)} - \frac{c}{2(-c+it)} \\
&= \frac{c^2}{(c^2+t^2)}
\end{aligned}$$

   vu les limites 0 des exponentielles de parties réelles négatives en $\pm\infty$.
   Comme cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$, le théorème d'inversion de Fourier (et la parité de la densité à la dernière égalité) donne :

$$\frac{c}{2}e^{-c|y|} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_Y(y) e^{-iyt} dy = \frac{c}{2}\Phi_{X_1}(-t) = \frac{c}{2}\Phi_{X_1}(t).$$

   Vu $c > 0$ cela donne la conclusion voulue.
2. Par changement de variable X_k a même loi que $X_1/\sqrt{k}$ vu par transfert pour h positif :

$$E(h(X_1/\sqrt{k})) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x/\sqrt{k}) \frac{c}{\pi(c^2+x^2)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x_1) \frac{c}{\pi(c^2 + (x_1\sqrt{k})^2)} dx_1 \sqrt{k} = E(h(X_k)).$$

   Donc par la question précédente, $\Phi_{X_k}(t) = \Phi_{X_1}(\frac{t}{\sqrt{k}}) = exp(-c|\frac{t}{\sqrt{k}}|)$
3. Calculons la fonction caractéristique de T_n.
   Par indépendance $\Phi_{T_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \Phi_{X_k/\sqrt{n}}(t) = \prod_{k=1}^{n} \Phi_{X_k}(\frac{t}{\sqrt{n}}) =$.
   Or par la question précédente, $\Phi_{X_k}(\frac{t}{\sqrt{n}}) = \Phi_{X_1}(\frac{t}{\sqrt{nk}}) = exp(-c|\frac{t}{\sqrt{nk}}|)$.
   Donc $\Phi_{T_n}(t) = exp(-c|t|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}})$.

4. Par le théorème de Paul Lévy, il suffit de trouver la limite des fonctions caractéristiques précédentes.
   Or par somme de Riemann $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n) \rightarrow_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2$
   (en fait comme l'intégrale est indéfinie, car la fonction intégrée n'est pas continue en 0, il serait plus précis de faire une comparaison série intégrale en utilisant la monotonie de $1/\sqrt{x}$ pour dire
   $$\int_{1/n}^{1+1/n} \frac{1}{\sqrt{x}}dx \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}} \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$
   et de prendre la limite.
   Donc $\Phi_{T_n}(t) \rightarrow_{n\to\infty} exp(-2c|t|)$ que l'on identifie comme la transformée de Fourier d'une loi de Cauchy de paramètre $2c$, donc $(T_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable de Cauchy de paramètre $2c$.