Université Claude Bernard
L3 Math Eco Probabilités 5

Mathématiques
2016-2017

Contrôle continu
Mercredi 29 mars 2017

Durée : 1H30

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de **JUSTIFIER** les réponses aux exercices.

Questions de Cours (4 points) :

1. (1 point) Énoncer la propriété de Markov forte pour une chaîne de Markov (avec la définition de la tribu $\mathcal{F}_T$ associée à un temps d'arrêt.)
2. (1 point) Donner les formulations équivalentes pour un état transitoire d'une chaîne de Markov.
3. (2 points) Énoncer le théorème des mesures invariantes pour une chaîne de Markov.

Exercice 1 (3 points)

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$ la filtration de cette suite. Soit S un temps d'arrêt pour cette filtration. On pose :

$$T = \inf\{n > S \ : \ X_n \in [-1, 1]\}.$$

1. Soit $n \geq k \geq 0$ Montrer que l'évènement $\{T = n\} \cap \{S = k\} \in \mathcal{F}_n$.
2. En déduire que T est un temps d'arrêt.

Exercice 2 (6 points)

Soit (X_1, X_2) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, \Gamma)$ avec

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathbf{E}(X_1|X_2) = \frac{X_2}{3}$.
2. Calculer $\mathbf{E}((X_1 + X_2)|X_2)$.
3. Que vaut $\mathbf{E}((X_1 - \frac{X_2}{3})^2)$?
4. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(X_1^2|X_2)$.
5. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}((X_1 + X_2)^2|X_2)$.
6. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(e^{X_1}|X_2)$.

Exercice 3 (7 points) On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur l'ensemble $E = \{1, 2, \dots, 8\}$ donnée par la matrice de transition suivante (les numéros de colonnes et lignes rappellent le nom des états).

$$Q = \begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
\hline
1 & . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\,.8 & 0 & 0 \\
2 & 0 & . & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0.3 & . & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 \\
4 & 0.8 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & . & 0 & 0.2 & 0 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & . & 0 & 0 \\
7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 2/3 \\
8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & .
\end{array}$$

On rappelle que l'on note $\mathbf{P}_x$ la probabilité pour la chaîne $CM(E, \delta_x, P)$ partant de x. $\mathbf{E}_x$ est l'espérance pour $\mathbf{P}_x$.

1. Compléter (les éléments diagonaux de) la matrice Q pour que ce soit une matrice de transition.
2. Classifier les états (c'est-à-dire : trouver les classes irréductibles, les états récurrents et transitoires)
3. Trouver les mesures de probabilités invariantes pour chaque classe irréductible récurrente.
4. Soit τ_7 le temps d'atteinte de l'état 7, c'est-à-dire :

   $$\tau_7 = \inf\{n \geq 1, X_n = 7\}.$$

   Calculer $\mathbf{E}_7(\tau_7)$.
5. Quels sont les mesures de probabilités invariantes de la chaîne complète (de matrice Q) ?
6. Soient C_1, C_2 les deux classes irréductibles closes. Pour $i = 1, 2$ et $x \in E$, calculer

   $$\mathbf{P}_x(X_n \in C_i \text{ pour tout } n \text{ assez grand}).$$