Université Claude Bernard
L3 Math Eco Probabilités 5

Mathématiques
2016-2017

Correction du Contrôle continu 2
Mercredi 29 mars 2017

Exercice 1 (3 points)

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles. Soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, ..., X_n)$ la filtration de cette suite. Soit S un temps d'arrêt pour cette filtration. On pose :

$$T = \inf\{n > S \ : \ X_n \in [-1, 1]\}.$$

1. Soit $n \geq k \geq 0$ On calcule l'évènement

$$\{T = n\} \cap \{S = k\} = \{S = k\} \cap \cap_{l=1}^{n-k-1}\{X_{k+l} \in [-1, 1]^c\} \cap \{X_n \in [-1, 1]\}$$

En effet pour que $T = n$ si $S = k$ il faut que la chaîne ne soit pas dans $[1, 1]$ pendant n instants après k et ensuite revienne en $x_n \in [-, 1]$
Les ensembles dont on prend l'intersection sont respectivement $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$ vu S temps d'arrêt, $\mathcal{F}_{k+l} \subset \mathcal{F}_n$ et $\mathcal{F}_n$ donc par intersection finie $\{T = n\} \cap \{S = k\} \in \mathcal{F}_n$.

2. En déduire que T est un temps d'arrêt.
Comme $S \leq T$ p.s. par définition $\{T = n\} = \cup_{k=0}^{n}\{T = n\} \cap \{S = k\}$ donc par union finie cet ensemble est encore dans $\mathcal{F}_n$. Donc T est un temps d'arrêt.

Exercice 2 (6 points)

Soit (X_1, X_2) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, \Gamma)$ avec

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Montrons que $\mathbf{E}(X_1|X_2) = \frac{X_2}{3}$.
Comme (X_1, X_2) gaussien centré, le cours donne $\mathbf{E}(X_1|X_2) = \lambda X_2$
Et, par la propriété caractéristique, on doit avoir $1 = E(X_1X_2) = E(\mathbf{E}(X_1|X_2)X_2) = \lambda E(X_2^2) = 3\lambda$.
2. On a $\mathbf{E}((X_1 + X_2)|X_2) = \frac{X_2}{3} + X_2$ par modularité.
3. Que vaut $\mathbf{E}((X_1 - \frac{X_2}{3})^2) = 1 * 3 - 2/3 + 3/9 = 8/3$?
4. Calculer l'espérance conditionnelle

$$\mathbf{E}(X_1^2|X_2) = \mathbf{E}((X_1 - \frac{X_2}{3})^2|X_2) + (\frac{X_2}{3})^2 == (\frac{X_2}{3})^2 + E((X_1 - \frac{X_2}{3})^2) = (\frac{X_2}{3})^2 + 8/3.$$

(vu par exemple que $X_1 - \frac{X_2}{3}$ et X_2 sont indépendants car ils forment un vecteur gaussien centré à coordonnées orthogonales, on peut aussi utiliser la formule comme au 6)

5. Calculer l'espérance conditionnelle par linéarité et modularité

$$\mathbf{E}((X_1+X_2)^2|X_2) = \mathbf{E}(X_1^2|X_2)+X_2^2+2X_2\mathbf{E}(X_1|X_2) = X_2^2(1+2/3+1/9)+8/3 = 16X_2^2/9+8/3.$$

6. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(e^{X_1}|X_2)$.
   Selon la formule du cours on considère $Z \sim \mathcal{N}(m, 8/3), N \sim \mathcal{N}(0,1)$ de sorte qu'on peut prendre $Z = m + \sqrt{8/3}N$ et on calcule

$$g(m) = \mathbf{E}(e^Z) = e^m \mathbf{E}(e^{\sqrt{8/3}N}) = e^{m+4/3}$$

   Conclusion, par le cours

$$\mathbf{E}(e^{X_1}|X_2) = g(\mathbf{E}(X_1|X_2)) = e^{(X_2+4)/3}.$$

Exercice 3 (7 points) On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots, 8\}$ donnée par la matrice de transition suivante (les numéros de colonnes et lignes rappellent le nom des états).

$$Q = \begin{array}{c|cccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline 1 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ .8 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 4 & 0.8 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.6 & 0 & 0.2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \end{array}$$

1. On a Complété ci-dessus (les éléments diagonaux de) la matrice Q pour que ce soit une matrice de transition.
2. Classifions les états (c'est-à-dire : trouvons les classes irréductibles, les états récurrents et transitoires)
   On a $1 \to 6 \to 4 \to 1$ sans d'autres connections sortantes vers d'autres états donc $C_1 := \{1, 6, 4\}$ est une classe irréductible close donc récurrente.
   On a $7 \to 8 \to 7$ et $C_2 = \{7, 8\}$ close, donc c'est classe irréductible close donc récurrente.
   $3 \to 7 \not\to 3$ donc 3 transitoire. De plus $2 \to 3 \to 2$ donc $\{2, 3\}$ et $\{5\}$ sont les deux autres classes irréductibles, on a vu que $\{2, 3\}$ est transitoire.
   Enfin $5 \to 7 \not\to 5$ donc 5 est aussi transitoire.
3. On trouve l'unique mesure invariante de C_2 $p\delta_7 + (1-p)\delta_8$, $p \in [0, 1]$ elle vérifie $p/3 + (1-p)/3 = p$ ce qui force $p = 1/3$. Donc la mesure invariante est $\pi_2 = \frac{1}{3}\delta_7 + \frac{2}{3}\delta_8$.
   On trouve l'unique mesure invariante de C_1 $\pi_1 = x\delta_1 + y\delta_4 + z\delta_6$, $x, y, z \in [0, 1]$ elle vérifie

$$x + y + z = 1$$
$$0,2x + 0,8y = x$$
$$0,2y + 0,2z = y$$
$$0,8x + 0,8z = z$$

   soit $x = y$, $z = 4y = 4x$ donc$6x = 1$ soit

$$\pi_1 = \frac{1}{6}\delta_1 + \frac{1}{6}\delta_4 + \frac{2}{3}\delta_6$$

   $p/3 + (1-p)/3 = p$ ce qui force $p = 1/3$. Donc la mesure invariante est $\pi_2 = \frac{1}{3}\delta_7 + \frac{2}{3}\delta_8$.

4. Soit τ_7 le temps d'atteinte de l'état 7, c'est-à-dire :
$$\tau_7 = \inf\{n \geq 1, X_n = 7\}.$$
Par le cours $\mathbf{E}_7(\tau_7) = \frac{1}{\pi_2(\{7\})} = 3$.
5. Les mesures de probabilités invariantes de la chaîne complète (de matrice Q) sont $t\pi_1 + (1-t)\pi_2$ avec $t \in [0,1]$.
6. Soient C_1, C_2 les deux classes irréductibles closes. On rappelle que l'on note $\mathbf{P}_x$ la probabilité pour la chaîne $CM(E, \delta_x, P)$ partant de x. Pour $i = 1, 2$ et $x \in E$, calculer
$$\mathbf{P}_x(X_n \in C_i \text{ pour tout } n \text{ assez grand}).$$
On commence par les cas simples si $x \in C_1 = \{1, 6, 4\}$ comme C_1 close
$$\mathbf{P}_x(X_n \in C_1 \text{ pour tout } n \text{ assez grand}) = 1.$$
$$\mathbf{P}_x(X_n \in C_2 \text{ pour tout } n \text{ assez grand}) = 0.$$
De même si $x \in C_2 = \{7, 8\}$:
$$\mathbf{P}_x(X_n \in C_2 \text{ pour tout } n \text{ assez grand}) = 1.$$
$$\mathbf{P}_x(X_n \in C_1 \text{ pour tout } n \text{ assez grand}) = 0.$$
Il reste donc à traiter $x \in \{2, 3, 5\}$. On note
$$q_i = \mathbf{P}_i(A), \quad A := \{X_n \in C_2 \text{ pour tout } n \text{ assez grand}\}.$$
et on cherche des équations sur les q_i. COmme les classes C_1, C_2 ne sont pas connectés, on a $q_1 = q_4 = q_6 = 0, q_7 = q_8 = 1$
Par Markov faible et le fait que partant de 2, on va vers 5 et 3
$$q_2 = \mathbf{P}_2(1_A 1_{X_1=3}) + \mathbf{P}_2(1_A 1_{X_1=4}) = \mathbf{P}_2(E_3(1_A)1_{X_1=3}) + \mathbf{P}_2(E_5(1_A)1_{X_1=4}) = q_3/2 + q_4/2$$
de même :
$$q_3 = \mathbf{P}_3(1_A 1_{X_1=2}) + \mathbf{P}_3(1_A 1_{X_1=7}) = \mathbf{P}_3(E_2(1_A A)1_{X_1=2}) + \mathbf{P}_3(E_7(1_A A)1_{X_1=7}) = 0.3 * q_2 + 0.7$$
$$\begin{aligned} q_5 &= \mathbf{P}_5(1_A 1_{X_1=5}) + \mathbf{P}_5(1_A 1_{X_1=7}) + \mathbf{P}_5(1_A 1_{X_1=4}) \\ &= \mathbf{P}_5(E_5(1_A)1_{X_1=5}) + \mathbf{P}_5(E_7(1_A)1_{X_1=7}) + \mathbf{P}_5(E_4(1_A)1_{X_1=4}) = q_5 * 0.6 + 0.2 + 0 \end{aligned}$$
donc $q_5 = 1/2$, $q_3 = 0.3 * (q_3/2 + 0) + 0.7$ soit $17/20 * q_3 = 28/40$ donc $q_3 = 28/34$ et $q_2 = 7/17$.
De même pour
$$r_i = \mathbf{P}_i(A), \quad A := \{X_n \in C_1 \text{ pour tout } n \text{ assez grand}\}.$$
On a d'abord $r_1 = r_4 = r_6 = 1, r_7 = r_8 = 0$ et
on obtient les équations :
$$r_2 = r_3/2 + r_4/2, \ r_3 = 0.3 r_2 + 0, \ r_5 = 0.6 r_5 + 0.2 + 0$$
donc $r_5 = 1/2$, $r_2 = 3r_2/20 + 1/2$, $r_2 = 10/17$, $r_3 = 3/17$.