Université Claude Bernard — Mathématiques
L3 Math Eco Probabilités 5 — 2017-2018

Contrôle continu
Mercredi 4 avril 2018

Durée : 1H30

Les documents et les calculatrices sont interdits.
On prendra soin de **JUSTIFIER** les réponses aux exercices.

Questions de Cours (4 points) :

1. (1,5 point) Énoncer le théorème de classification des états.
2. (1 point) Donner les formulations équivalentes pour un état récurrent d'une chaîne de Markov.
3. (1,5 points) Énoncer le théorème des mesures invariantes pour une chaîne de Markov.

Exercice 1 (10 points) On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots, 9\}$ donnée par la matrice de transition suivante (les numéros de colonnes et lignes rappellent le nom des états).

$$Q = \begin{array}{c|ccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0.5 & 0 \\
4 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
5 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
6 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\
7 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\
8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.75 \\
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & 1/5
\end{array}$$

On rappelle que l'on note $\mathbf{P}_x$ la probabilité pour la chaîne $CM(E, \delta_x, P)$ partant de x. $\mathbf{E}_x$ est l'espérance pour $\mathbf{P}_x$.

1. Classifier les états (c'est-à-dire : trouver les classes irréductibles, les états récurrents et transitoires)
2. Trouver les mesures de probabilité invariantes pour chaque classe irréductible récurrente. Sont-elles réversibles (quand on les considère sur la chaîne restreinte à la classe récurrente) ?
3. Soit τ_8 le temps d'atteinte de l'état 8, c'est-à-dire :
$$\tau_8 = \inf\{n \geq 1, X_n = 8\}.$$
Calculer $\mathbf{E}_8(\tau_8)$.
4. Calculer $\mathbf{E}_7(\tau_8)$.
5. Calculer $\mathbf{E}_3(\tau_8)$ et $\mathbf{E}_6(\tau_8)$.
6. Quels sont les mesures de probabilité invariantes de la chaîne complète (de matrice Q) ?
7. Soient $C_1 = \{3, 6\}$, $C_2 = \{8, 9\}$. Pour $i = 1, 2$ et $x \in E$, calculer
$$\mathbf{P}_x(X_n \in C_i \text{ pour tout } n \text{ assez grand}).$$

Exercice 2 (6 points+ Bonus : 1 point)

Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, \Gamma)$ avec

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}\Big(\big(X_1 - \frac{X_3}{3}\big)^2 \Big| X_3\Big)$.
2. Montrer que $\mathbf{E}(X_2|X_1 + X_3) = \frac{X_1+X_3}{2}$.
3. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(X_2^2|X_1 + X_3)$.
4. Calculer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(e^{X_2^2}|X_1 + X_3)$.
5. **(Bonus : 1 point)** Calculer $\mathbf{E}(X_2|X_1, X_3)$.