Université Claude Bernard
L3 Math Eco Probabilités 5

Mathématiques
2016-2017

Contrôle continu

Exercice 1 (10 points) On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots, 9\}$ donnée par la matrice de transition suivante (les numéros de colonnes et lignes rappellent le nom des états).

$$Q = \begin{array}{c|ccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0.5 & 0 \\ 4 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 7 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0.75 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4/5 & 1/5 \end{array}$$

On rappelle que l'on note $\mathbf{P}_x$ la probabilité pour la chaîne $CM(E, \delta_x, P)$ partant de x. $\mathbf{E}_x$ est l'espérance pour $\mathbf{P}_x$.

1. Compléter (les éléments diagonaux de) la matrice Q pour que ce soit une matrice de transition. (cf ci-dessus)
2. Classifier les états (c'est-à-dire : trouver les classes irréductibles, les états récurrents et transitoires)

   $C_3 = \{1, 4, 5, 2\}$ irréd rec idem $C_2 = \{8, 9\}$, $\{7\}$ transitoire, $C_1 = \{3, 6\}$ irréd transitoire.
3. Trouver les mesures de probabilités invariantes pour chaque classe irréductible récurrente. Sont-elles réversibles ? Sur C_2 le système est $\mu_8/4+\mu_9 4/5 = \mu_8$ $\mu_9 = 1-\mu_8$ soit $(15/4+4)\mu_8 = 4$, $\mu_8 = 16/31$, $\mu_9 = 15/31$. $16/31 P_{8,9} = 12/31 = 15/31 P_{9,8}$ donc la mesure $\pi_1 = 15\delta_9 + 16\delta_8)/31$ est réversible.

   Sur C_3 les équations d'une mesure réversible sont $\mu_1 1/2 = \mu_4 1/3 = \mu_5 1/3 = \mu_2 1/2 = c$ Avec la condition $\mu_1 + \mu_4 + \mu_5 + \mu_2 = 1$ on a $2c + 3c + 3c + 2c = 10c = 1$ donc $\mu_2 = \mu_1 = 1/5, \mu_4 = \mu_5 = 3/10$ et l'unique mesure de probabilité invariante $\pi_2 = 3(\delta_4 + \delta_5)/10 + (\delta_2 + \delta_1)/5$ qui est réversible.
4. Soit τ_8 le temps d'atteinte de l'état 8, c'est-à-dire :

   $$\tau_8 = \inf\{n \geq 1, X_n = 8\}.$$

   Par le cours $\mathbf{E}_8(\tau_8) = 1/\mu_8 = 31/16$ par la question précédente.
5. Calculer $\mathbf{E}_7(\tau_8) \geq \mathbf{E}_2(\tau_8)/3 = +\infty$ par Markov faible et vu $2 \in C_3 \not\ni 8$ fermé.
6. Calculer $\mathbf{E}_3(\tau_8)$ et $\mathbf{E}_6(\tau_8)$.

   On établit système par Markov faible : $x_3 := \mathbf{E}_3(\tau_8) = (1 + x_3)/4 + (1 + x_6)/4 + 1/2$
   et $x_6 := \mathbf{E}_6(\tau_8) = 1 + x_6/3 + x_3/3 + x_9/3$.
   $x_9 = (1 + x_9)/5 + 4/5$
   Donc $4x_9/5 = 1, x_9 = 5/4$ et $3x_3/4 = 1 + x_6/4, 2x_6/3 = 17/12 + x_3/3$ soit $x_6 = 3x_3 - 4$
   $x_3 = 2x_6 - 17/4 = 6x_3 - 8 - 17/4$ soit $5x_3 = 49/4$, $x_3 = 49/20, x_6 = 67/20$.

7. Quels sont les mesures de probabilités invariantes de la chaîne complète (de matrice Q) ? $t\pi_1 + (1-t)\pi_2$
8. Soient $C_1 = \{3, 6\}$, $C_2 = \{8, 9\}$. Pour $i = 1, 2$ et $x \in E$, calculer

$$\mathbf{P}_x(X_n \in C_i \text{ pour tout } n \text{ assez grand}).$$

On note p_x la valeur pour C_1 et q_x pour C_2
Si $x \in C_2$, $q_x = 1, p_x = 0$ vu C_2 récurrente, si $x \in C_3$ réc $p_x = q_x = 0$ de même.
$p_7 = 0$ vu $C_2 \cup C_3 \cup \{7\}$ fermé
vu le caractère transitoire absorbé, $p_3 = p_6 = 0$ mais revoyons le par système :
$p_3 = p_6/4 + p_3/4 + p_8/4, p_6 = p_6/3 + p_3/3 + p_9/3$ vu $p_9 = p_8 = 0$ l'unique sol est bien (0,0)
Reste $q_3 = q_6/4 + q_3/4 + 1/2$, $q_6 = q_6/3 + q_3/3 + 1/3$ $q_7 = q_7/3 + 0/3 + 1/3$ soit $q_7 = 1/2$
$3q_3 = q_6 + 2$, $2q_6 = q_3 + 1 = 6q_3 - 4$ donc $q_3 = 1 = q_6$.

Exercice 2 (6 points+ Bonus : 1 point)
Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur gaussien de loi $\mathcal{N}(0, \Gamma)$ avec

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Calculons l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}\Big(\big(X_1 - \frac{X_3}{3}\big)^2 \Big| X_3\Big)$.
ON calcule d'abord $Cov(X_1 - \frac{X_3}{3}, X_3) = \Gamma_{1,3} - \Gamma_{3,3}/3 = 1 - 3/3 = 0$ or Par combinaison linéaire $(X_1 - \frac{X_3}{3}, X_3)$ est un vecteur gaussien comme X donc les deux coordonnées sont indépendantes vu qu'elles sont de covariance nulle. Donc par le cours $\mathbf{E}\Big(\big(X_1 - \frac{X_3}{3}\big)^2 \Big| X_3\Big) = \mathbf{E}\Big(\big(X_1 - \frac{X_3}{3}\big)^2\Big) = \Gamma_{1,1} - 2\Gamma_{1,3} + \Gamma_{3,3}/9 = 3 - 2/3 + 1/3 = 8/3$.
2. Montrons que $\mathbf{E}(X_2 | X_1 + X_3) = \frac{X_1 + X_3}{2}$. Comme $(X_2, X_1 + X_3)$ est un vecteur gaussien par combinaison linéaire, on sait par le cours que $\mathbf{E}(X_2 | X_1 + X_3) = \lambda(X_1 + X_3)$. Or par (PC) pour la projection orthogonale sur $L^2(\sigma(X_1 + X_3))$ (= epsérance conditionnelle) on a l'équation $E(X_2(X_1 + X_3)) = \lambda(E((X_1 + X_3)^2)$. DOnc $(2 + 2) = \lambda(3 + 3 + 2)$ soit $\lambda = 1/2$.
3. Calculons l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(X_2^2 | X_1 + X_3) = h((X_1 + X_3)/2)$. Or par le cours on a $h(m) = E((Y + m)^2)$ avec $Y \sim \mathcal{N}(0, c)$ si $c = Var(X_2 - ((X_1 + X_3)/2) = 4 + 8/4 - (2 + 2) = 2$ Donc $h(m) = m^2 + 2$ et $\mathbf{E}(X_2^2 | X_1 + X_3) = ((X_1 + X_3)/2)^2 + 2$.
4. Calculons l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(e^{\frac{X_2^2}{8}} | X_1 + X_3) = g((X_1 + X_3)/2)$. Or par le cours $Y \sim \mathcal{N}(0, c)$

$$g(m) = E(e^{(Y+m)^2}) = e^{m^2/8} E(e^{(Y^2 + 2mY)/8}) = e^{m^2/8} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{-x^2/4 + x^2/8 + mx/4}$$

$$g(m) = e^{m^2/8} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8\pi}} e^{-(x-m)^2/8 + m^2/8} = \sqrt{2} e^{m^2/4}$$

5. **(Bonus : 1 point)** Calculons $\mathbf{E}(X_2 | X_1, X_3)$. Par symétrie 1,3 on se doute que c'est la réponse du 1, on vérifie juste $E(X_2 X_1) = 2 = (3 + 1)/2 = E((X_1 + X_3)X_1)/2$ et $E(X_2 X_3) = 2 = (3 + 1)/2 = E((X_1 + X_3)X_3)/2$ ce qui conclut par (PC) de la projection orthogonale et vu que le vecteur de départ est gaussien.